Московский авиационный институт

Учебно-исследовательская работа студентов

Цилиндрическая электромагнитная волна

Оператор набла
(оператор Гамильтона)

Оператор набла (∇) в декартовой системе координат

$$\nabla \equiv \mathbf{x}_0 \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{y}_0 \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{z}_0 \frac{\partial}{\partial z}$$

Свойства оператора набла (∇)

$$\nabla \varphi = \mathbf{x}_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \mathbf{y}_0 \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \mathbf{z}_0 \frac{\partial \varphi}{\partial z} = ?$$

φ - функция или скалярное поле

Свойства оператора набла (∇)

$$\nabla \varphi = \mathbf{x_0} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \mathbf{y_0} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \mathbf{z_0} \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \mathrm{grad}\, \varphi$$

φ - функция или скалярное поле

Свойства оператора набла (∇)

$$\nabla \cdot \boldsymbol{a} = \nabla_x a_x + \nabla_y a_y + \nabla_z a_z =$$

$$= \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = ?$$

a — векторное поле

Свойства оператора набла (∇)

$$\nabla \cdot \boldsymbol{a} = \nabla_x a_x + \nabla_y a_y + \nabla_z a_z =$$

$$= \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = \operatorname{div} \boldsymbol{a}$$

а — векторное поле

Свойства оператора набла (∇)

$$\nabla \times \mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{x}_0 & \mathbf{y}_0 & \mathbf{z}_0 \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = \mathrm{rot}\, \mathbf{a}$$

a — векторное поле

Уравнения Максвелла

$$\operatorname{rot}\mathbf{H}=\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}+\mathbf{j}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{E}=-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{D}=\rho$$

$$\operatorname{div}\mathbf{B}=0$$

$$D=\varepsilon\varepsilon_0 E$$

$$B=\mu\mu_0 H$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{F}=\begin{vmatrix}\mathbf{x}_0 & \mathbf{y}_0 & \mathbf{z}_0\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ F_x & F_y & F_z\end{vmatrix}$$

$$\mathbf{j}=\sigma(\mathbf{E}+\mathbf{E}_{\text{ст}})=$$
$$=\sigma\mathbf{E}+\mathbf{j}_{\text{ст}}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{F}=\frac{\partial F_x}{\partial x}+\frac{\partial F_y}{\partial y}+\frac{\partial F_z}{\partial z}$$

Уравнения Максвелла

$$\nabla\times\mathbf{H}=\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}+\mathbf{j}$$

$$\nabla\times\mathbf{E}=-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho$$

$$\nabla\cdot\mathbf{B}=0$$

$$\mathbf{j}=\sigma(\mathbf{E}+\mathbf{E}_{\text{ст}})=$$

$$=\sigma\mathbf{E}+\mathbf{j}_{\text{ст}}$$

$$\mathbf{D}=\varepsilon\varepsilon_0\mathbf{E}$$

$$\mathbf{B}=\mu\mu_0\mathbf{H}$$

$$\nabla\times\mathbf{F}=\begin{vmatrix}\mathbf{x}_0 & \mathbf{y}_0 & \mathbf{z}_0\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ F_x & F_y & F_z\end{vmatrix}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{F}=\frac{\partial F_x}{\partial x}+\frac{\partial F_y}{\partial y}+\frac{\partial F_z}{\partial z}$$

Цилиндрическая электромагнитная волна

Уравнения электродинамики

В однородной среде, т. е. при $\varepsilon = \text{const}$, $\mu = \text{const}$ уравнения Максвелла можно свести к уравнениям:

$$\nabla^2 \mathbf{H} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = -\operatorname{rot}\mathbf{j}$$

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0}\operatorname{grad}\rho + \mu\mu_0\frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t}$$

Уравнения такого вида называют уравнениями Даламбера (д'Аламбера)

Уравнения электродинамики

Если токи и заряды отсутствуют, то уравнения принимают вид:

$$\nabla^2 \mathbf{H} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = 0$$

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0$$

Уравнения такого вида называют волновыми

Волновое уравнение для гармонической зависимости

Для гармонической временной зависимости,
т. е. когда временная зависимость описывается выражением

$$e^{i(\omega t+\varphi)},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \rightarrow -\omega^2$$

$$\Downarrow$$

$$\nabla^2 \dot{u} + k^2 \dot{u} = 0$$

Это уравнение называют однородным уравнением Гельмгольца

Волновое уравнение для гармонической зависимости

Можно перейти к скалярному уравнению Гельмгольца.

$$\nabla^2 \psi + k^2 \psi = 0,$$

Волновое уравнение в цилиндрической системе координат

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\,\psi}{\partial\,\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\,\varphi^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial\,z^2}+k^2\psi=0$$

Решение волнового уравнения методом разделения переменных

Предположим, что

$$\psi = R(\rho)\,\Phi(\varphi)\,Z(z) = R \cdot \Phi \cdot Z$$

Волновое уравнение в цилиндрической системе координат

Поделим волновое уравнение на ψ:

$$\underbrace{\frac{1}{\psi\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\right)}_{\mathrm{I}}+\underbrace{\frac{1}{\psi\rho^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}}_{\mathrm{II}}+\underbrace{\frac{1}{\psi}\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}}_{\mathrm{III}}+k^2=0$$

Волновое уравнение в цилиндрической системе координат

Подставляем ψ в I:

$$\frac{1}{\psi\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\right)=\frac{1}{R(\rho)\Phi(\varphi)Z(z)\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\left(R(\rho)\Phi(\varphi)Z(z)\right)}{\partial\rho}\right)=$$

$$=\frac{1}{R(\rho)\Phi(\varphi)Z(z)\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\Phi(\varphi)Z(z)\frac{\partial\left(R(\rho)\right)}{\partial\rho}\right)=$$

$$=\frac{1}{R(\rho)\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial R(\rho)}{\partial\rho}\right)=\frac{1}{R\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dR}{d\rho}\right)$$

Волновое уравнение в цилиндрической системе координат

Подставляем ψ в II:

$$\frac{1}{\psi\rho^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}=\frac{1}{R(\rho)\Phi(\varphi)Z(z)\rho^2}\frac{\partial^2\left(R(\rho)\Phi(\varphi)Z(z)\right)}{\partial\varphi^2}=$$

$$=\frac{1}{\Phi(\varphi)\rho^2}\frac{\partial^2\left(\Phi(\varphi)\right)}{\partial\varphi^2}=\frac{1}{\Phi\rho^2}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}$$

Волновое уравнение в цилиндрической системе координат

Подставляем ψ в III:

$$\frac{1}{\psi}\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}=\frac{1}{R(\rho)\Phi(\varphi)Z(z)}\frac{\partial^2\left(R(\rho)\Phi(\varphi)Z(z)\right)}{\partial z^2}=$$

$$=\frac{1}{Z(z)}\frac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2}=\frac{1}{Z}\frac{d^2 Z}{d z^2}$$

Волновое уравнение в цилиндрической системе координат

Теперь волновое уравнение принимает вид:

$$\underbrace{\frac{1}{\rho R}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dR}{d\rho}\right)}_{\mathrm{I}}+\underbrace{\frac{1}{\rho^2\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}}_{\mathrm{II}}+\underbrace{\frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2}}_{\mathrm{III}}+k^2=0$$

Волновое уравнение в цилиндрической системе координат

Часть III не зависит от ρ и φ, поэтому обозначим ее как константу:

$$\frac{1}{Z}\frac{d^2 Z}{d z^2} = -k_z^2$$

Волновое уравнение в цилиндрической системе координат

Теперь волновое уравнение принимает вид:

$$\frac{1}{\rho R}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dR}{d\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}+\underbrace{k^2-k_z^2}_{k_\rho^2}=0$$

$$k_\rho^2=k^2-k_z^2$$

Волновое уравнение в цилиндрической системе координат

Умножим уравнение на ρ^2:

$$\underbrace{\frac{\rho}{R}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dR}{d\rho}\right)}_{I}+\underbrace{\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}}_{II}+\underbrace{k_\rho^2\rho^2}_{III}=0$$

Волновое уравнение в цилиндрической системе координат

Часть II не зависит от ρ и z, поэтому обозначим ее как

$$\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} = -n^2$$

Уравнение принимает вид:

$$\frac{\rho}{R}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dR}{d\rho}\right) + k_\rho^2\rho^2 - n^2 = 0$$

Волновое уравнение в цилиндрической системе координат

Умножаем уравнение на R:

$$\rho\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dR}{d\rho}\right)+\left(k_\rho^2\rho^2-n^2\right)R=0$$

Волновое уравнение в цилиндрической системе координат

Получили систему уравнений:

$$\rho\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dR}{d\rho}\right)+\left(k_\rho^2\rho^2-n^2\right)R=0$$

$$\frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2}=-k_z^2\Rightarrow\frac{d^2Z}{dz^2}+k_z^2z=0$$

$$\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}=-n^2\Rightarrow\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}+n^2\Phi=0$$

$$k_\rho^2=k^2-k_z^2\Rightarrow k_\rho^2+k_z^2=k^2$$

Волновое уравнение в цилиндрической системе координат

Преобразуем первое слагаемое в первом уравнении:

$$\rho \frac{d}{d\rho}\left(\rho \frac{dR}{d\rho}\right) = \rho\left(\frac{d\rho}{d\rho}\frac{dR}{d\rho} + \rho \frac{\partial^2 R}{d\rho^2}\right) =$$

$$= \rho^2 \frac{d^2 R}{d\rho^2} + \rho \frac{dR}{d\rho}$$

Волновое уравнение в цилиндрической системе координат

Уравнение принимает вид:

$$\rho^2 \frac{d^2 R}{d\rho^2} + \rho \frac{dR}{d\rho} + \left(k_\rho^2 \rho^2 - n^2\right) R = 0$$

Волновое уравнение в цилиндрической системе координат

Делим уравнение на ρ^2:

$$\frac{d^2 R}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{dR}{d\rho} + \left(k_\rho^2 - \frac{n^2}{\rho^2}\right) R = 0$$

Волновое уравнение в цилиндрической системе координат

Сделаем замену:

$$\rho \to x$$

$$R(\rho) \to y(x) = y$$

$$n \to \nu$$

Тогда уравнение принимает вид:

$$y'' + \frac{1}{x} y' + \left(k_\rho^2 - \frac{\nu^2}{x^2} \right) y = 0$$

Такое уравнение называют уравнением Бесселя

Волновое уравнение в цилиндрической системе координат

Любое нетривиальное решение уравнения Бесселя называется цилиндрической функцией.

Примеры цилиндрических функций:

- Функция Бесселя первого рода $J_\nu(x)$.
- Функция Неймана $Y_\nu(x)$.
- Функции Ханкеля 1 и 2 родов $H_\nu^{(1)}(x)$, $H_\nu^{(2)}(x)$.

Функция Бесселя первого рода

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+\nu+1)\cdot\Gamma(k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu},$$

где:

- $\nu \in \mathbb{R}$,
- Γ — гамма-функция Эйлера

Гамма-функция Эйлера

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t}\, dt$$

где $z \in C$: $Re(z) > 0$

Гамма-функция Эйлера

$$\Gamma(z)=\frac{1}{z}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}}{1+\frac{z}{n}}$$

если $z \in C \setminus \{0; -1; -2; \ldots\}$, т. е.

z — комплексное число за исключением отрицательных целых чисел

Гамма-функция Эйлера в MATLAB

```
Y = gamma(x)
```

Функция Бесселя первого рода

Если $v \in \mathbb{N}$, $v \geq 0$,

тогда $\Gamma(\mathrm{k} + v + 1) = (k + v)!$, $\Gamma(k + 1) = k!$,

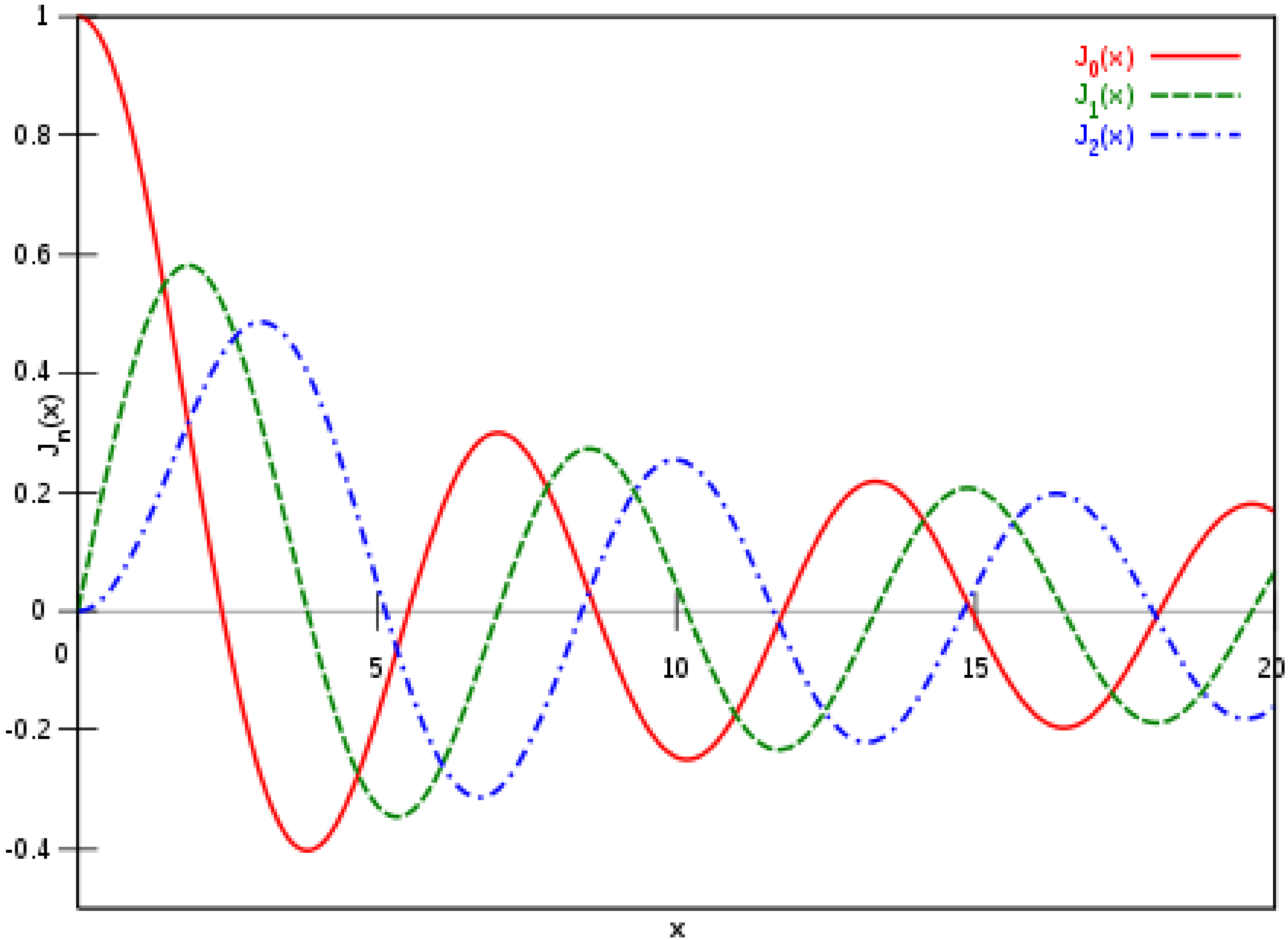
и Функция Бесселя принимает вид:

$$J_v(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k+v)! \cdot k!} \left(\frac{x}{2} \right)^{2k+v}$$

Функция Бесселя первого рода в MATLAB

```
J = besselj(v, x)
```

Функция Бесселя первого рода



Свойства функции Бесселя первого рода

1. Функция имеет конечное значение в точке $x = 0$ при целых или неотрицательных v.

2. Функция затухает как $1 / x^{1/2}$.

Функция Неймана
(функция Бесселя второго рода)

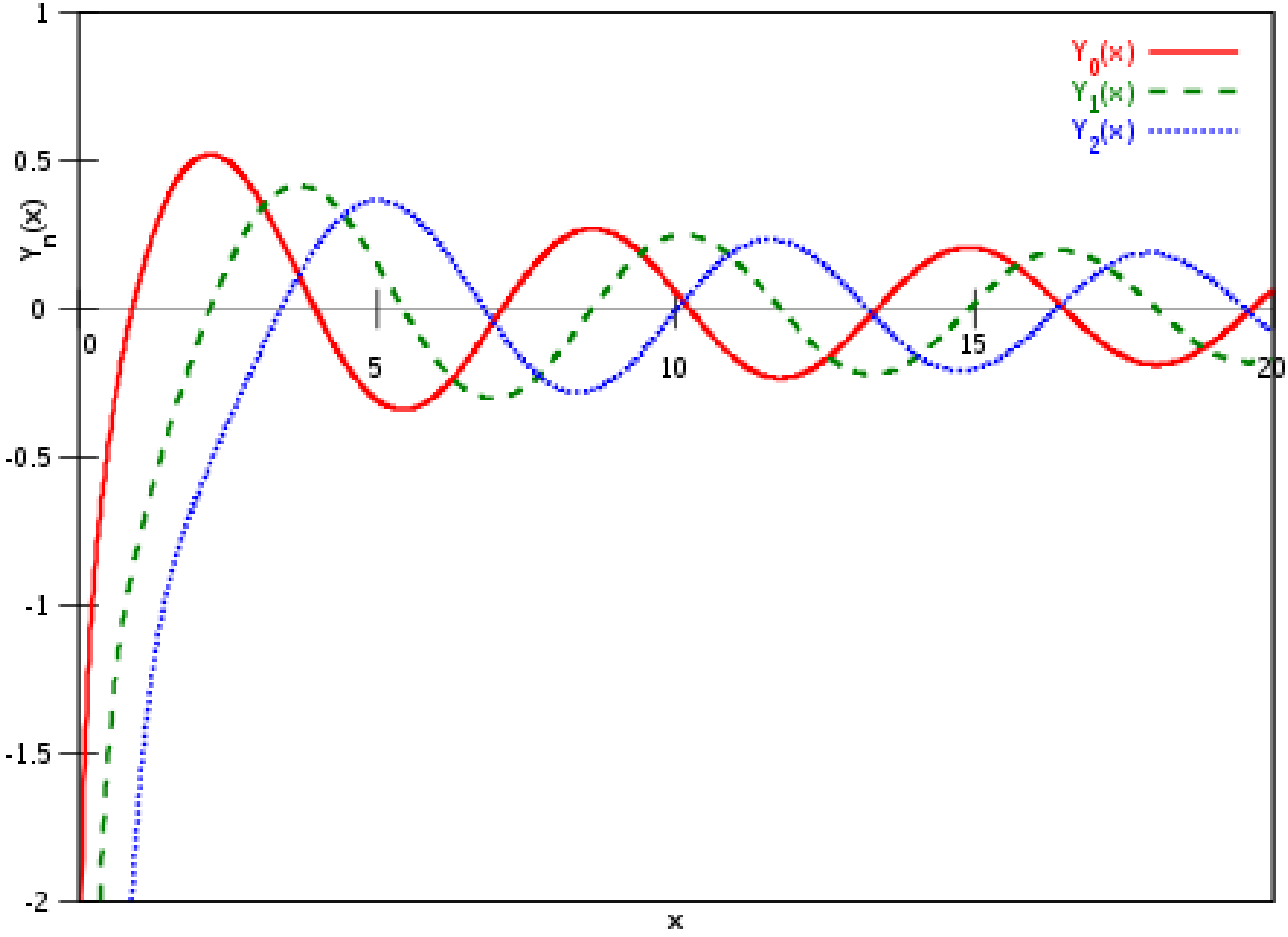
$$Y_v(x) = \frac{J_v(x)\cos(v\cdot\pi) - J_{-v}(x)}{\sin(v\cdot\pi)}$$

$$\text{при } v \in \mathbb{N}, \quad J_{-v}(x) = (-1)^v J_v(x)$$

Функция Неймана в MATLAB

```
Y = bessely(v, x)
```

Функция Неймана (функция Бесселя второго рода)



Свойство функции Неймана (функции Бесселя второго рода)

Функция не имеет конечного значения в точке $x = 0$.

Функции Ханкеля (функции Бесселя третьего рода)

$$H_{v}^{(1)}(x) = J_{v}(x) + j \cdot Y_{v}(x)$$

- функция Ханкеля первого рода

$$H_{v}^{(2)}(x) = J_{v}(x) - j \cdot Y_{v}(x)$$

- функция Ханкеля второго рода

Функции Ханкеля в MATLAB

```
H = besselh(v, K, x)
```

Свойства функций Бесселя первого и второго родов

При x → ∞:

$$J_\nu(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi \cdot x}} \cos\left(x - \frac{\pi}{4} - \frac{\nu \cdot \pi}{2}\right)$$

$$Y_\nu(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi \cdot x}} \sin\left(x - \frac{\pi}{4} - \frac{\nu \cdot \pi}{2}\right)$$

Свойства функций Ханкеля

При x → ∞:

$$H_{\nu}^{(1)}(x) \approx \sqrt{\frac{2}{i\pi \cdot x}}\, i^{-\nu} e^{i \cdot x}$$

$$H_{\nu}^{(2)}(x) \approx \sqrt{\frac{2i}{\pi \cdot x}}\, i^{\nu} e^{-i \cdot x}$$

Свойства функции Ханкеля

При x → ∞:

$$H_0^{(2)}(x) \approx \sqrt{\frac{2}{x}}\, e^{-i(x-\pi/4)}$$

Уравнение цилиндрической волны

$$\mathbf{E}(\boldsymbol{\rho}) = A \cdot H_0^{(2)}(k|\boldsymbol{\rho}|) \approx A\sqrt{\frac{2}{k|\boldsymbol{\rho}|}}\, e^{-i(k|\boldsymbol{\rho}| - \pi/4)}$$