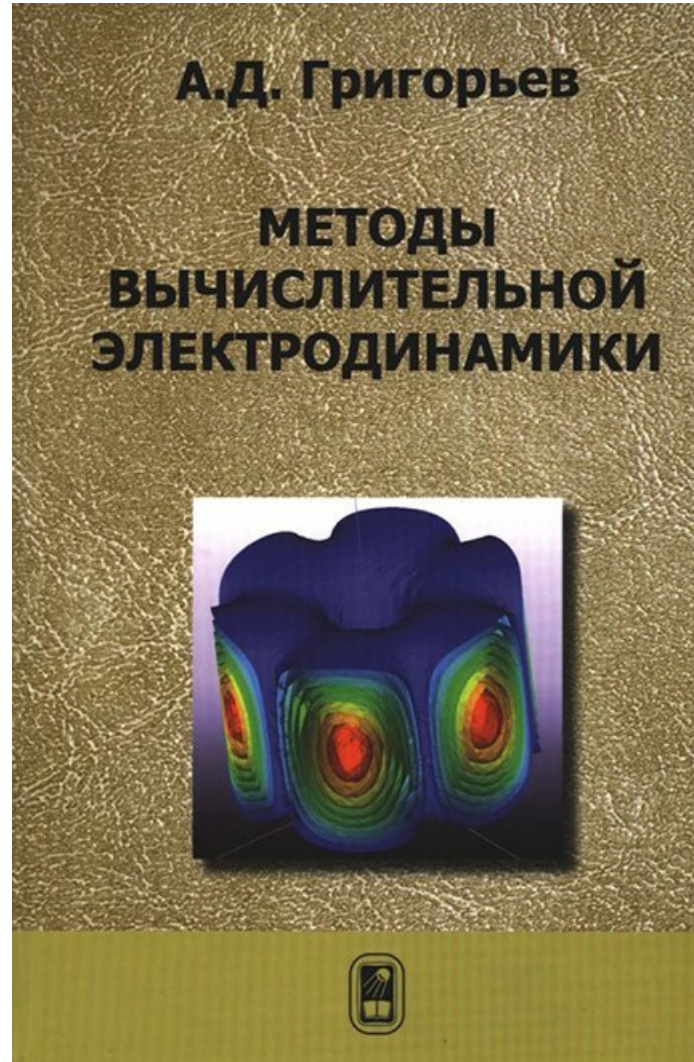


**Московский Авиационный Институт  
(национальный исследовательский университет)**

---

**Постановка задачи  
электродинамического  
моделирования**

# Литература



## Обозначения

$A$  — скалярная величина

$\mathbf{A}$  — векторная величина

# Этапы построения математической модели

- Постановка задачи.
  - Определение целей расчета.**
  - Определение класса задачи.
  - Определение необходимого объема входной и выходной информации.
  - Определение допустимой погрешности результатов.
- Аналитическая обработка.
  - Формулировка уравнений.
  - Формулировка начальных условий.
  - Формулировка граничных условий.
  - Описание формы расчетной области и свойств среды.
  - Выбор метода решения.
- Дискретизация модели.
- Решение полученных систем уравнений.
- Обработка результатов.

# Этапы построения математической модели

- Постановка задачи.
  - Определение целей расчета.
  - Определение класса задачи.**
  - Определение необходимого объема входной и выходной информации.
  - Определение допустимой погрешности результатов.
- Аналитическая обработка.
  - Формулировка уравнений.
  - Формулировка начальных условий.
  - Формулировка граничных условий.
  - Описание формы расчетной области и свойств среды.
  - Выбор метода решения.
- Дискретизация модели.
- Решение полученных систем уравнений.
- Обработка результатов.

---

# Классы электродинамических задач

# Классы электродинамических задач



# Классы электродинамических задач





## Нелинейные среды

Среда называется **нелинейной**, отклик которой на действие внешнего излучения нелинейно зависит от амплитуды возмущения.

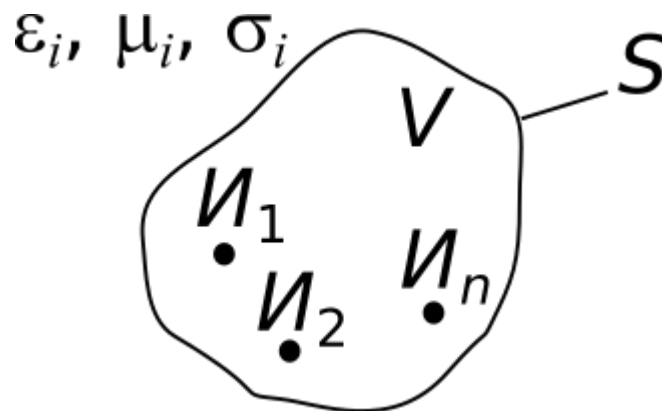
В **нелинейных** средах не выполняется принцип суперпозиции: отклик на сумму возмущений не равен сумме откликов на отдельные возмущения.

# Классы электродинамических задач



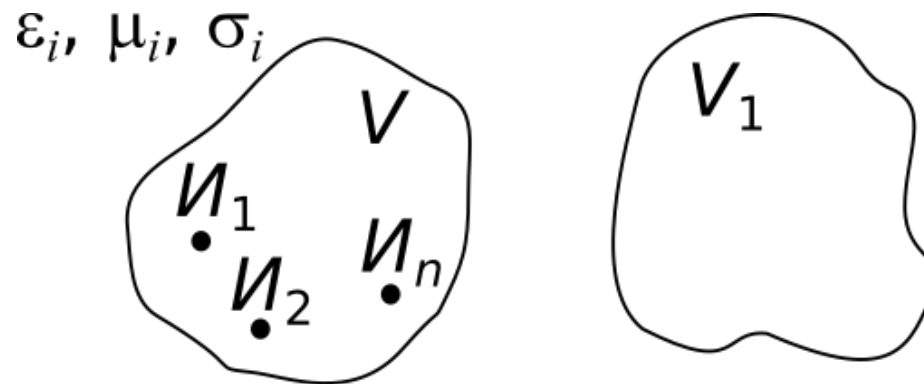
## Прямая задача электродинамики

**Прямая задача электродинамики (задача анализа)** — определение электромагнитного поля в некоторой области  $V$  с определенными начальными и граничными условиями на поверхности  $S$ , созданное заданными источниками.

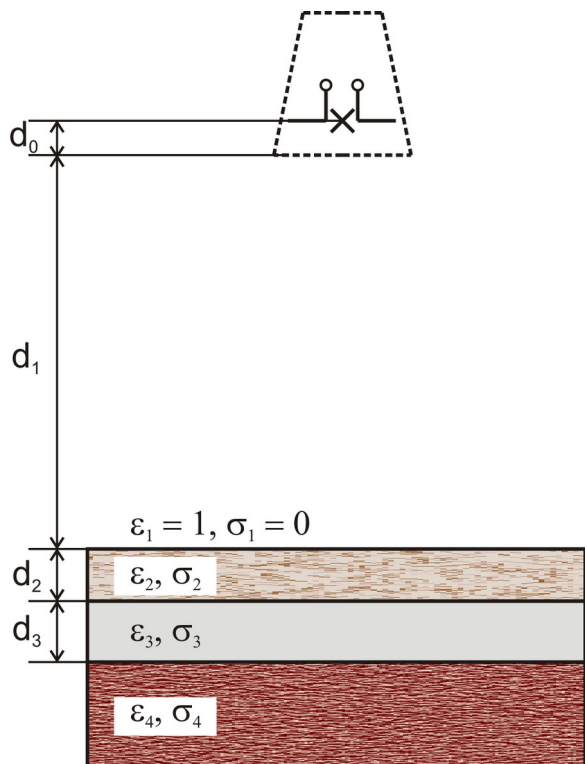


## Обратная задача электродинамики

**Обратная задача электродинамики (задача синтеза)** — определение параметров среды и (или) источников в области  $V$  по известному распределению электромагнитного поля в некоторой другой области  $V_1$ , которая может не совпадать с  $V$ .



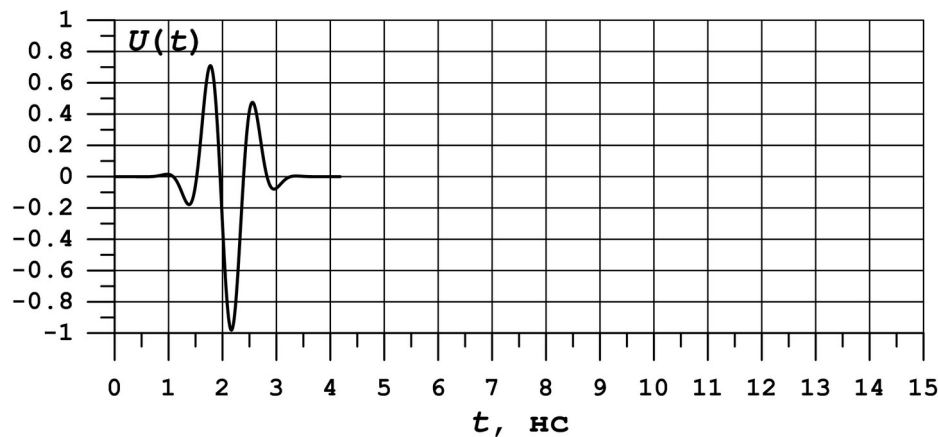
# Пример обратной задачи — диагностика многослойной среды радаром подповерхностного зондирования



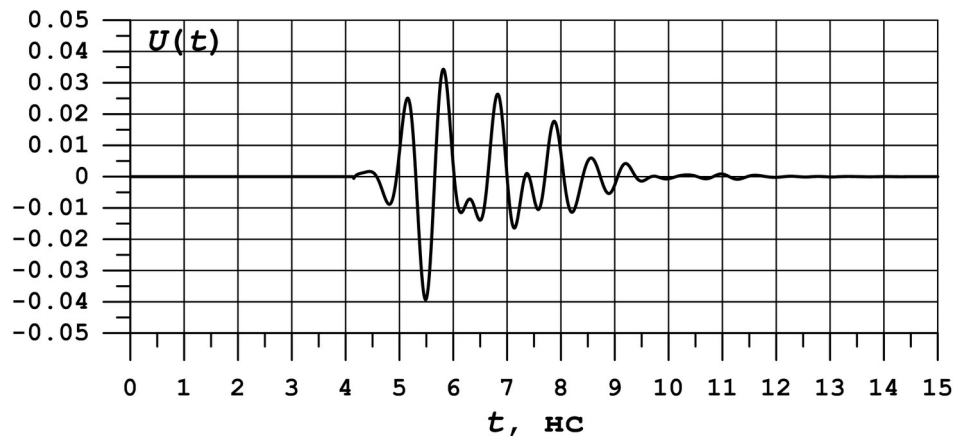
## Параметры среды

1.  $\epsilon_1 = 1.0, d_1 = 0.5$  м
2.  $\epsilon_2 = 4.0, d_2 = 0.10$  м
3.  $\epsilon_3 = 1.0, d_3 = 0.105$  м
4.  $\epsilon_4 = 4.0$

## Зондирующий сигнал



## Отраженный сигнал



# Классы электродинамических задач



## Корректно поставленная задача

Задача  $y = A(x)$  называется корректно поставленной, если для любых входных данных  $x$  из некоторого класса решение  $y$  существует, единственно и устойчиво по входным данным.

## Устойчивость задачи

Пусть  $\delta x$  — погрешность входных данных

$$y + \delta y = A(x + \delta x)$$

$\delta y = A(x + \delta x) - A(x)$  — неустранимая погрешность решения.

Если решение непрерывно зависит от входных данных, т.е. всегда  $\|\delta y\| \rightarrow 0$  при  $\|\delta x\| \rightarrow 0$ , то задача называется устойчивой по входным данным; в противном случае задача неустойчива по входным данным.



# Классы электродинамических задач



## Краевые задачи

Для решения задачи используются уравнения Максвелла, записанные через комплексные амплитуды.

Решение производится в частотной области.

Анализ стационарных процессов.

## Начально-краевые задачи

Для решения задачи используются уравнения Максвелла, записанные для мгновенных значений.

Решение производится во временной области.

Анализ переходных процессов.

# Классы электродинамических задач



## Задачи о вынужденных колебаниях

В задачах о вынужденных колебаниях (волнах) в расчетной области присутствуют сторонние токи и (или) на границе области моделирования заданы неоднородные граничные условия.

## Задачи о свободных колебаниях

В задачах о **собственных (свободных) колебаниях (волнах)** источники возбуждения отсутствуют. Цель моделирования — определение типов колебаний (волн), которые могут существовать в заданной области при заданных условиях.

Такие задачи также называют задачами на **собственные значения**.

# Классы электродинамических задач



## Внутренние и внешние задачи

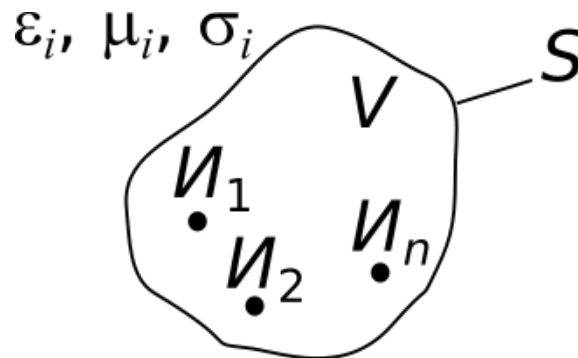
Задачу электродинамики называют внутренней, если расчетная область ограничена в пространстве, и внешней в противном случае.



## Внутренняя задача

Необходимо найти решение уравнений Максвелла или соответствующих им волновых уравнений в области  $V$ , ограниченной поверхностью  $S$ .

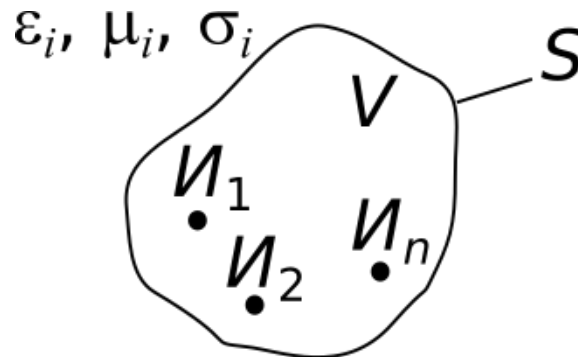
Это решение должно удовлетворять на поверхности  $S$  граничным условиям.



# Требования для решения внутренней задачи во временной области

Решение внутренней задачи существует и единственно, если:

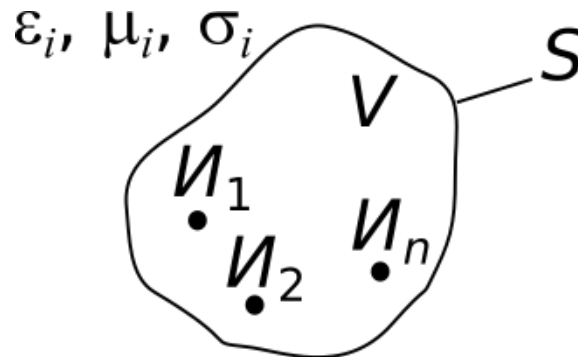
1. В начальный момент времени  $t_0$  во всем объеме  $V$  заданы значения напряженностей электрического и магнитного полей  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t_0)$ ,  $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t_0)$ .
2. На поверхности  $S$  заданы касательные составляющие  $\mathbf{E}_\tau$  или  $\mathbf{H}_\tau$ , или на части поверхности заданы  $\mathbf{E}_\tau$ , а на остальной части —  $\mathbf{H}_\tau$ .
3. В объеме  $V$  или его части электропроводность среды отлична от 0.



# Требования для решения внутренней задачи в частотной области

Решение внутренней задачи существует и единственно, если:

1. На поверхности  $S$  заданы касательные составляющие  $\mathbf{E}_\tau$  или  $\mathbf{H}_\tau$ , или на части поверхности заданы  $\mathbf{E}_\tau$ , а на остальной части —  $\mathbf{H}_\tau$ .
2. В объеме  $V$  или его части мнимые части  $\varepsilon$  и (или)  $\mu$  среды отлична от 0.



## Внешняя задача

Область моделирования не ограничена.

Например, задача излучения: в свободном безграничном пространстве необходимо найти решение неоднородного волнового уравнения, удовлетворяющего условию излучения на бесконечности.

## Требования для решения внешней задачи

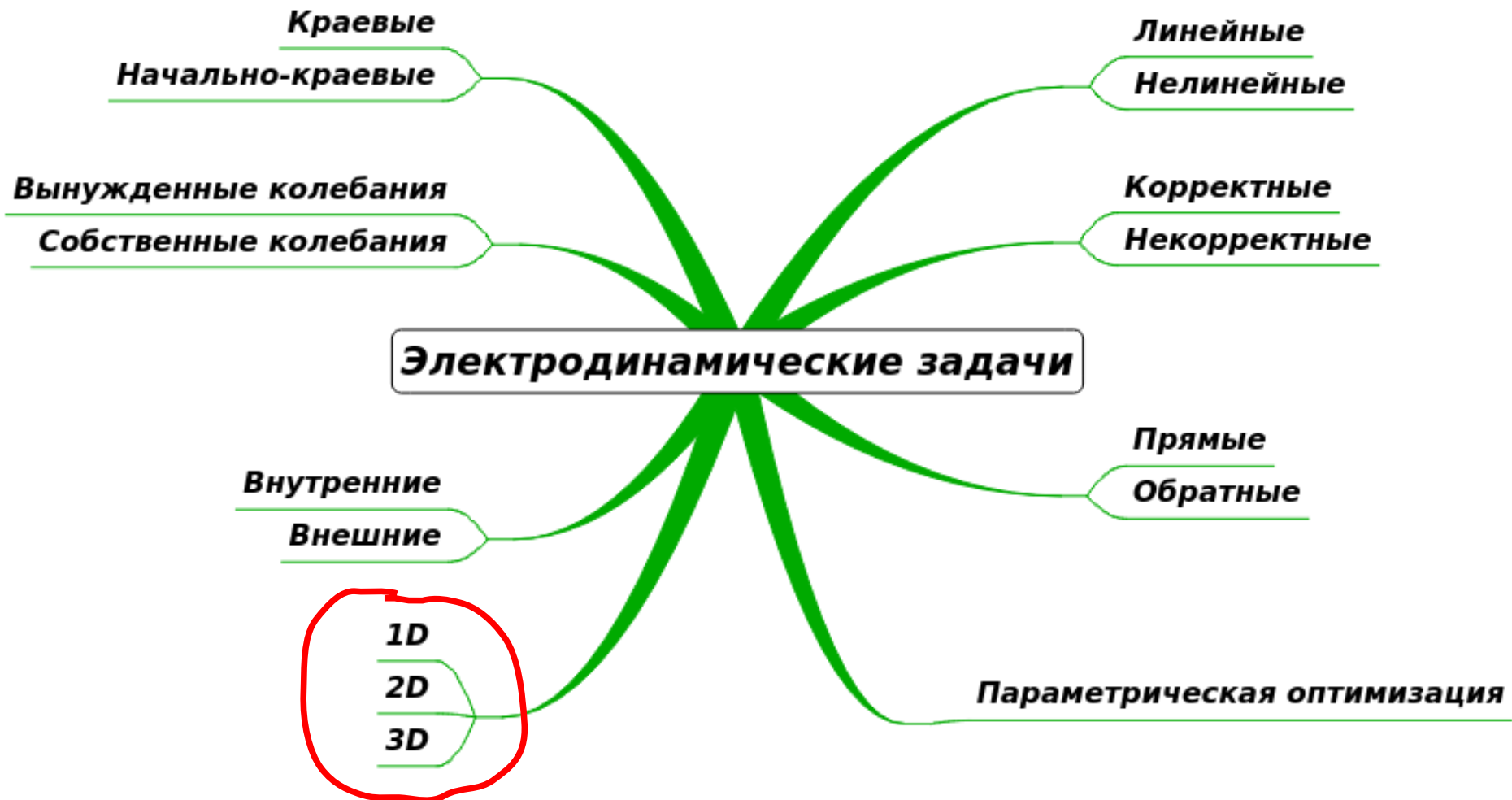
Решение внешней задачи существует и единственно, если:  
на поверхности областей, вне которых задано ЭМ поле, заданы касательные составляющие  $\mathbf{E}_\tau$  или  $\mathbf{H}_\tau$ , а энергия ЭМ поля, создаваемого источниками конечной интенсивности и размера, во всем пространстве остается конечной.

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_V (\epsilon_a |\vec{E}|^2 + \mu_a |\vec{H}|^2) r^2 dr d\theta d\varphi < \infty \quad (1.1)$$

$r$  — расстояние от источников

$V$  — заполняет все пространство

# Классы электродинамических задач



# Классы электродинамических задач



# Алгоритмы оптимизации

- Алгоритм градиентного спуска.
- Алгоритм Нелдера-Мида (симплекс-метод).
- Алгоритм имитации отжига.
- Генетический алгоритм.
- Алгоритм роя частиц.
- Алгоритм дифференциальной эволюции.
- ...



# Классы задач, решаемые в дальнейшем

- Линейные задачи.
- Корректные задачи.
- Прямые задачи (задачи анализа).
- Начально-краевые задачи.
- Задачи о вынужденных колебаниях.
- Размерности задачи - 1D, 2D.
- Внутренние задачи.

# Этапы построения математической модели

- Постановка задачи.
  - Определение целей расчета.
  - Определение класса задачи.
  - Определение необходимого объема входной и выходной информации.**
  - Определение допустимой погрешности результатов.
- Аналитическая обработка.
  - Формулировка уравнений.
  - Формулировка начальных условий.
  - Формулировка граничных условий.
  - Описание формы расчетной области и свойств среды.
  - Выбор метода решения.
- Дискретизация модели.
- Решение полученных систем уравнений.
- Обработка результатов.

# Этапы построения математической модели

- Постановка задачи.
  - Определение целей расчета.
  - Определение класса задачи.
  - Определение необходимого объема входной и выходной информации.
  - Определение допустимой погрешности результатов.**
- Аналитическая обработка.
  - Формулировка уравнений.
  - Формулировка начальных условий.
  - Формулировка граничных условий.
  - Описание формы расчетной области и свойств среды.
  - Выбор метода решения.
- Дискретизация модели.
- Решение полученных систем уравнений.
- Обработка результатов.

## Источники погрешности

- Погрешность за счет неточности исходных данных.
- Погрешность математической модели.
- Погрешность метода за счет дискретизации задачи.
- Вычислительная погрешность.

# Этапы построения математической модели

- **Постановка задачи.**
  - Определение целей расчета.
  - Определение класса задачи.
  - Определение необходимого объема входной и выходной информации.
  - Определение допустимой погрешности результатов.
- **Аналитическая обработка.**
  - Формулировка уравнений.
  - Формулировка начальных условий.
  - Формулировка граничных условий.
  - Описание формы расчетной области и свойств среды.
  - Выбор метода решения.
- Дискретизация модели.
- Решение полученных систем уравнений.
- Обработка результатов.

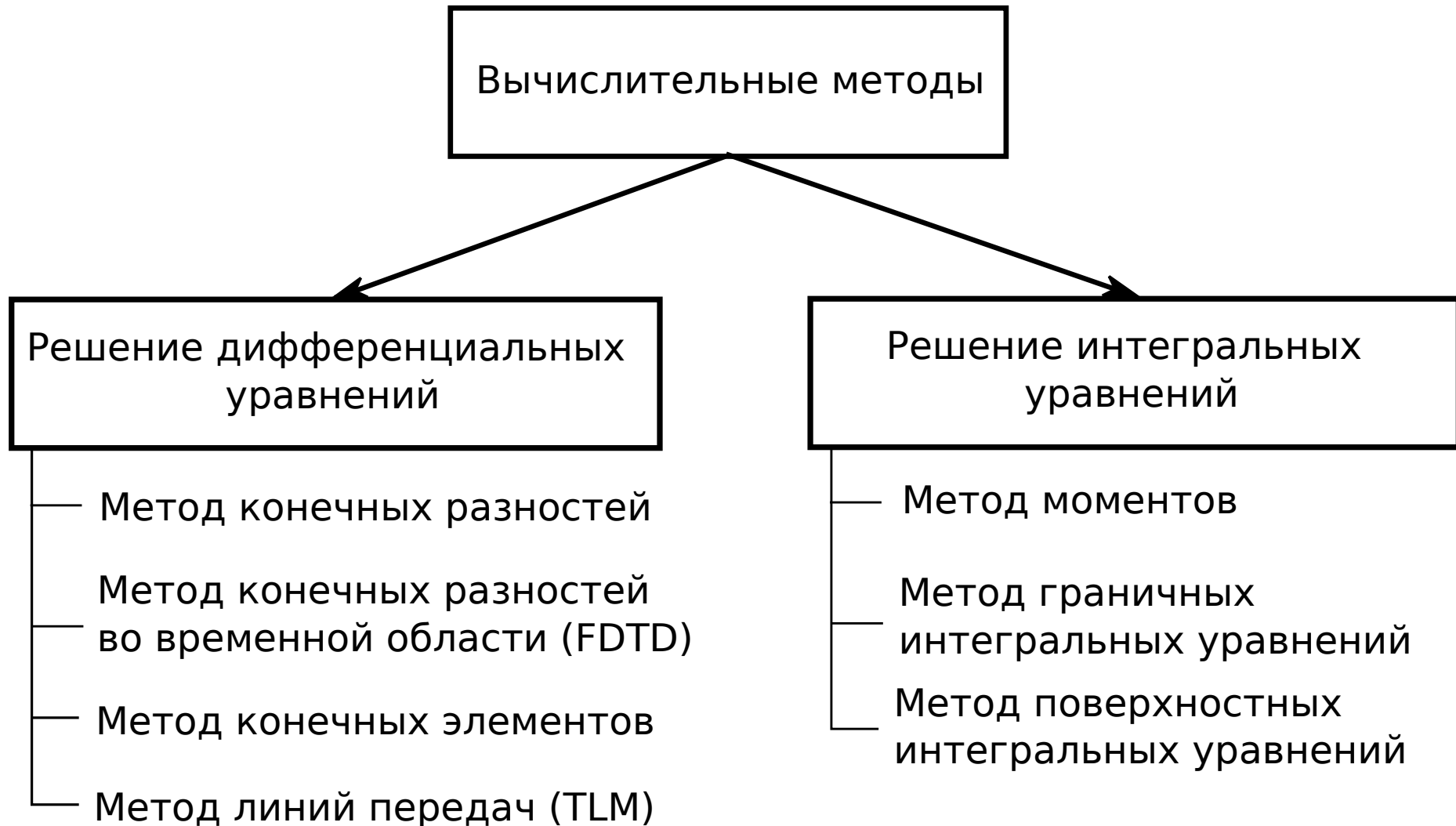
# Этапы построения математической модели

- Постановка задачи.
  - Определение целей расчета.
  - Определение класса задачи.
  - Определение необходимого объема входной и выходной информации.
  - Определение допустимой погрешности результатов.
- Аналитическая обработка.
  - Формулировка уравнений.
  - Формулировка начальных условий.
  - Формулировка граничных условий.
  - Описание формы расчетной области и свойств среды.
  - Выбор метода решения.
- **Дискретизация модели.**
- Решение полученных систем уравнений.
- Обработка результатов.

# Этапы построения математической модели

- Постановка задачи.
  - Определение целей расчета.
  - Определение класса задачи.
  - Определение необходимого объема входной и выходной информации.
  - Определение допустимой погрешности результатов.
- Аналитическая обработка.
  - Формулировка уравнений.
  - Формулировка начальных условий.
  - Формулировка граничных условий.
  - Описание формы расчетной области и свойств среды.
  - Выбор метода решения.
- Дискретизация модели.
- **Решение полученных систем уравнений.**
- Обработка результатов.

# Классификация вычислительных методов





# Этапы построения математической модели

- Постановка задачи.
  - Определение целей расчета.
  - Определение класса задачи.
  - Определение необходимого объема входной и выходной информации.
  - Определение допустимой погрешности результатов.
- Аналитическая обработка.
  - Формулировка уравнений.
  - Формулировка начальных условий.
  - Формулировка граничных условий.
  - Описание формы расчетной области и свойств среды.
  - Выбор метода решения.
- Дискретизация модели.
- Решение полученных систем уравнений.
- **Обработка результатов.**