

**Московский Авиационный Институт
(национальный исследовательский университет)**

«Метод конечных разностей во временной области (FDTD)»

Уравнения Максвелла

Уравнения Максвелла

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{j}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$$

$$\begin{aligned} \mathbf{j} &= \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{E}_{\text{ст}}) = \\ &= \sigma \mathbf{E} + \mathbf{j}_{\text{ст}} \end{aligned}$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \mathbf{E}$$

$$\mathbf{B} = \mu \mu_0 \mathbf{H}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{x}_0 & \mathbf{y}_0 & \mathbf{z}_0 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

Оператор набла (∇) или оператор Гамильтона

$$\nabla \equiv \mathbf{x}_0 \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{y}_0 \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{z}_0 \frac{\partial}{\partial z}$$

Свойства оператора набла (∇)

$$\nabla \phi = x_0 \frac{\partial \phi}{\partial x} + y_0 \frac{\partial \phi}{\partial y} + z_0 \frac{\partial \phi}{\partial z} = ?$$

ϕ - скалярное поле

Свойства оператора набла (∇)

$$\nabla \phi = \mathbf{x}_0 \frac{\partial \phi}{\partial x} + \mathbf{y}_0 \frac{\partial \phi}{\partial y} + \mathbf{z}_0 \frac{\partial \phi}{\partial z} = \text{grad } \phi$$

ϕ - скалярное поле

Свойства оператора набла (∇)

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{a} &= \nabla_x a_x + \nabla_y a_y + \nabla_z a_z = \\ &= \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = ?\end{aligned}$$

\mathbf{a} — векторное поле

Свойства оператора набла (∇)

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{a} &= \nabla_x a_x + \nabla_y a_y + \nabla_z a_z = \\ &= \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = \operatorname{div} \mathbf{a}\end{aligned}$$

\mathbf{a} — векторное поле

Свойства оператора набла (∇)

$$\nabla \times \mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{x}_0 & \mathbf{y}_0 & \mathbf{z}_0 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = \text{rot } \mathbf{a}$$

\mathbf{a} — векторное поле

Уравнения Максвелла

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{j}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\begin{aligned} \mathbf{j} &= \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{E}_{\text{ст}}) = \\ &= \sigma \mathbf{E} + \mathbf{j}_{\text{ст}} \end{aligned}$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \mathbf{E}$$

$$\mathbf{B} = \mu \mu_0 \mathbf{H}$$

$$\nabla \times \mathbf{F} = \text{rot } \mathbf{F}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \text{div } \mathbf{F}$$

Одномерный метод FDTD

FDTD. Одномерный случай. Закон Ампера

Пусть поле может меняться только вдоль оси X

$$\varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{j} = \nabla \times \mathbf{H} =$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{x}_0 & \mathbf{y}_0 & \mathbf{z}_0 \\ \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix} = ?$$

FDTD. Одномерный случай. Закон Ампера

Пусть поле может меняться только вдоль оси X

$$\varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{j} = \nabla \times \mathbf{H} =$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{x}_0 & \mathbf{y}_0 & \mathbf{z}_0 \\ \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix} = \mathbf{x}_0 \cdot 0 - \mathbf{y}_0 \frac{\partial H_z}{\partial x} + \mathbf{z}_0 \frac{\partial H_y}{\partial x}$$

FDTD. Одномерный случай. Закон Фарадея

Пусть поле может меняться только вдоль оси X

$$-\mu\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \nabla \times \mathbf{E} =$$
$$= \begin{vmatrix} \mathbf{x}_0 & \mathbf{y}_0 & \mathbf{z}_0 \\ \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = ?$$

FDTD. Одномерный случай. Закон Фарадея

Пусть поле может меняться только вдоль оси X

$$-\mu\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \nabla \times \mathbf{E} =$$
$$= \begin{vmatrix} \mathbf{x}_0 & \mathbf{y}_0 & \mathbf{z}_0 \\ \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = \mathbf{x}_0 \cdot 0 - \mathbf{y}_0 \frac{\partial E_z}{\partial x} + \mathbf{z}_0 \frac{\partial E_y}{\partial x}$$

FDTD. Одномерный случай

Объединяем предыдущие уравнения

$$\varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{j} = -\mathbf{y}_0 \frac{\partial H_z}{\partial x} + \mathbf{z}_0 \frac{\partial H_y}{\partial x}$$

$$-\mu \mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -\mathbf{y}_0 \frac{\partial E_z}{\partial x} + \mathbf{z}_0 \frac{\partial E_y}{\partial x}$$

FDTD. Одномерный случай

$$\mathbf{x}_0 \varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t} + \mathbf{y}_0 \varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} + \mathbf{z}_0 \varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial t} + \mathbf{x}_0 j_x + \mathbf{y}_0 j_y + \mathbf{z}_0 j_z =$$

$$-\mathbf{y}_0 \frac{\partial H_z}{\partial x} + \mathbf{z}_0 \frac{\partial H_y}{\partial x}$$

$$-\mathbf{x}_0 \mu \mu_0 \frac{\partial H_x}{\partial t} - \mathbf{y}_0 \mu \mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial t} - \mathbf{z}_0 \mu \mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial t} = -\mathbf{y}_0 \frac{\partial E_z}{\partial x} + \mathbf{z}_0 \frac{\partial E_y}{\partial x}$$

FDTD. Одномерный случай

Или в скалярном виде:

$$\mu\mu_0 \frac{\partial H_x}{\partial t} = 0$$

$$\varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t} + j_x = 0$$

$$\mu\mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial x}$$

$$\varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial t} + j_z = \frac{\partial H_y}{\partial x}$$

$$-\mu\mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial t} = \frac{\partial E_y}{\partial x}$$

$$\varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} + j_y = -\frac{\partial H_z}{\partial x}$$

FDTD. Одномерный случай

Или в скалярном виде:

$$\mu\mu_0 \frac{\partial H_x}{\partial t} = 0$$

$$\varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t} + j_x = 0$$

$$\mu\mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial x}$$

$$\varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial t} + j_z = \frac{\partial H_y}{\partial x}$$

$$-\mu\mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial t} = \frac{\partial E_y}{\partial x}$$

$$\varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} + j_y = -\frac{\partial H_z}{\partial x}$$

FDTD. Одномерный случай

Пусть существуют только E_z и H_y компоненты поля

$$\mu \mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial x}$$

$$\varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial t} + j_z = \frac{\partial H_y}{\partial x}$$

Дискретизация

$$E_z(x, t) = E_z(m\Delta x, q\Delta t) = E_z^q[m]$$

$$H_y(x, t) = H_y(m\Delta x, q\Delta t) = H_y^q[m]$$

Δx — пространственное смещение

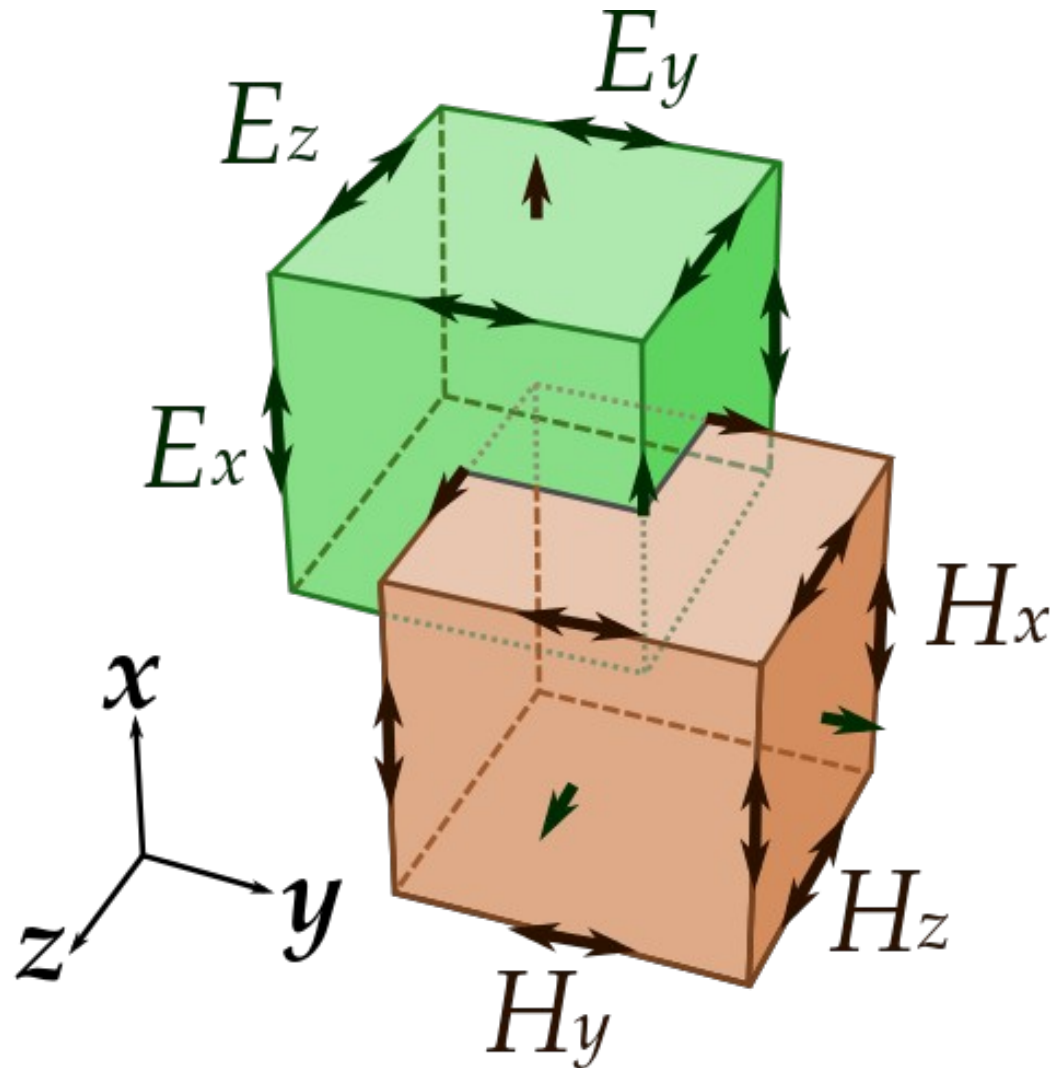
Δt — временное смещение

m — номер пространственного шага

q — номер временного шага

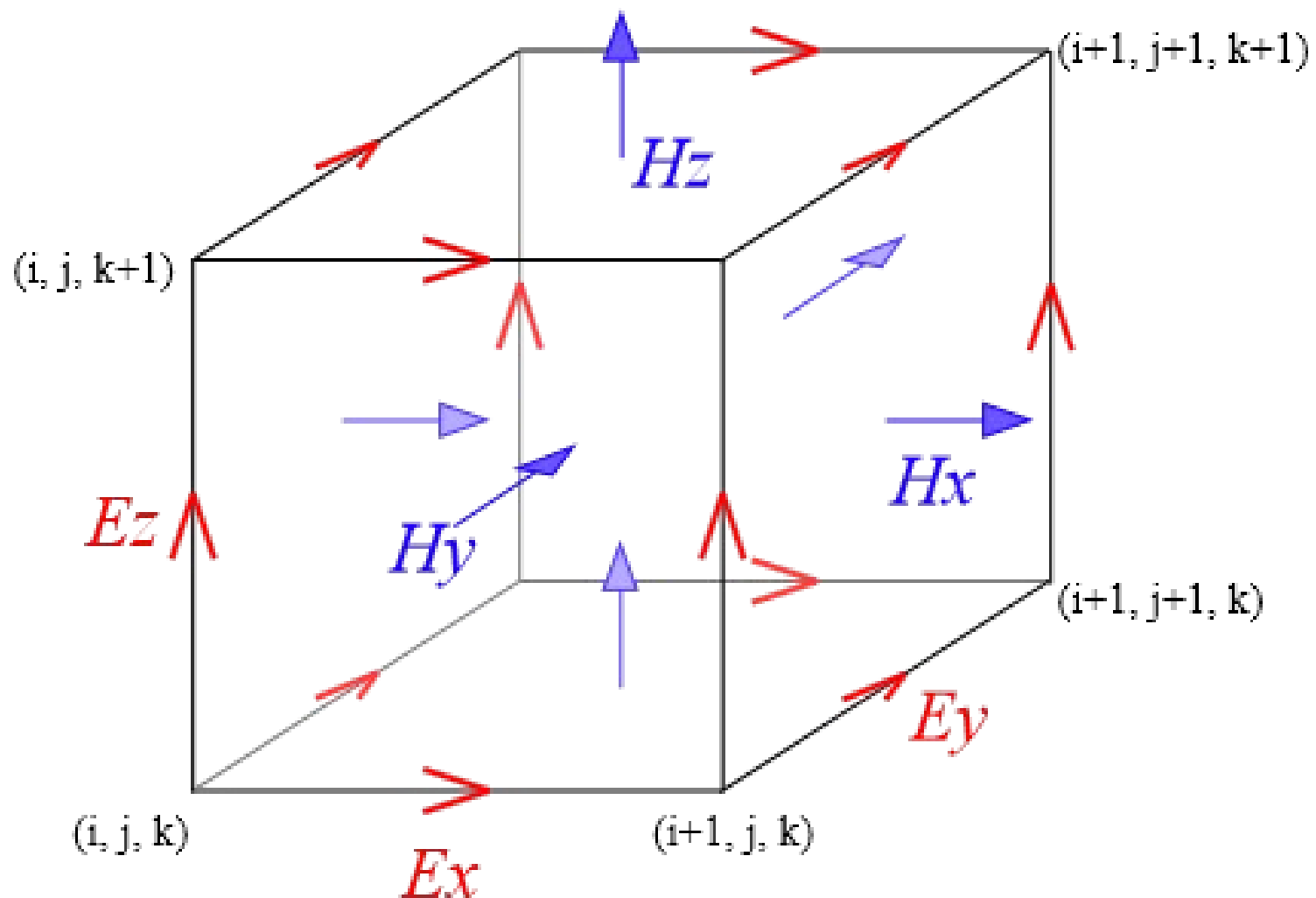
Трёхмерная ячейка для метода FDTD (ячейка Йи, Yee cell)

22

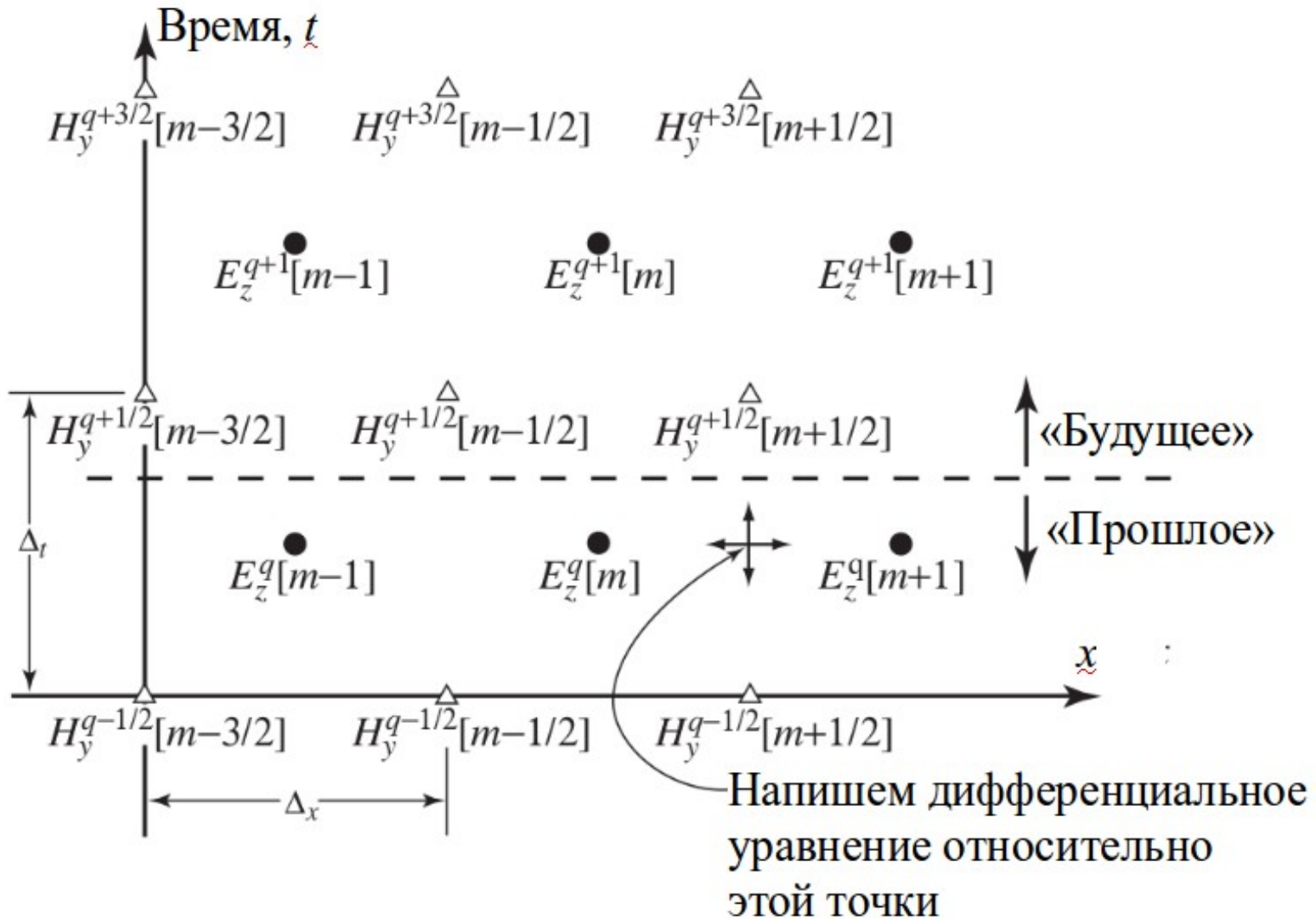


Трёхмерная ячейка для метода FDTD (ячейка Йи, Yee cell)

23



Пространственно-временная сетка для одномерного случая



Переходим к конечным разностям. Закон Фарадея

$$\mu \mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial t} \Big|_{(m+1/2)\Delta x, q\Delta t} = \frac{\partial E_z}{\partial x} \Big|_{(m+1/2)\Delta x, q\Delta t}$$

Переходим к конечным разностям.

Закон Фарадея

$$\mu \mu_0 \frac{H_y^{q+1/2}[m+1/2] - H_y^{q-1/2}[m+1/2]}{\Delta_t} =$$

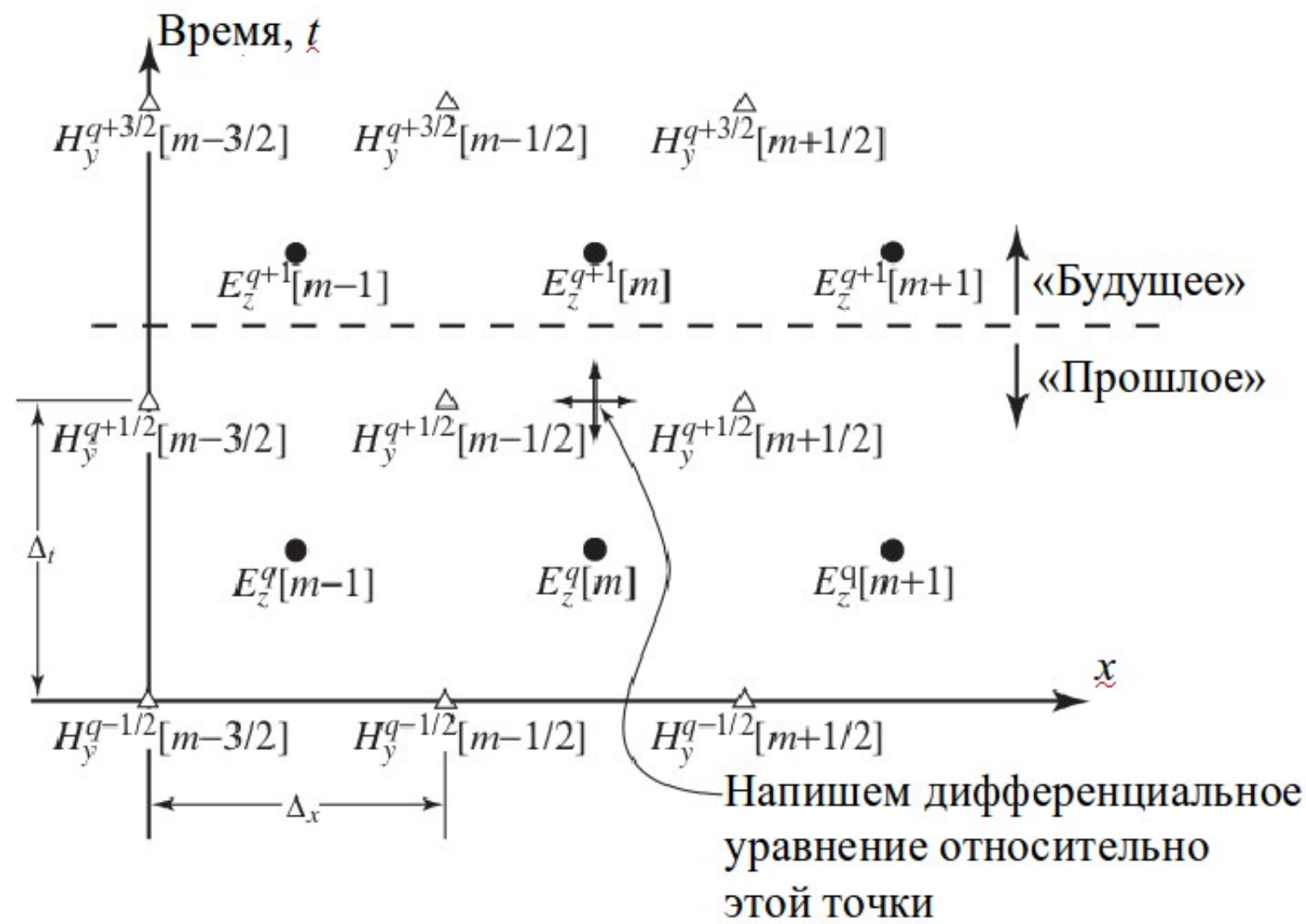
$$= \frac{E_z^q[m+1] - E_z^q[m]}{\Delta_x}$$

Переходим к конечным разностям. Закон Фарадея

Из предыдущего уравнения

$$\begin{aligned} H_y^{q+1/2} [m+1/2] &= \\ &= H_y^{q-1/2} [m+1/2] + \frac{\Delta_t}{\mu \mu_0 \Delta_x} \left(E_z^q [m+1] - E_z^q [m] \right) \end{aligned}$$

Пространственно-временная сетка для одномерного случая



Переходим к конечным разностям.

Закон Ампера

$$\left(\varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial t} + j_z \right) \Big|_{m \Delta x, (q+1/2) \Delta t} = \frac{\partial H_y}{\partial x} \Big|_{m \Delta x, (q+1/2) \Delta t}$$

Переходим к конечным разностям. Закон Ампера

$$\begin{aligned} \epsilon \epsilon_0 \frac{E_z^{q+1}[m] - E_z^q[m]}{\Delta_t} + j_z^{q+1/2}[m] &= \\ = \frac{H_y^{q+1/2}[m+1/2] - H_y^{q+1/2}[m-1/2]}{\Delta_x} \end{aligned}$$

Переходим к конечным разностям.

Закон Ампера

$$\begin{aligned}
 E_z^{q+1}[m] &= \\
 &= E_z^q[m] + \frac{\Delta_t}{\varepsilon \varepsilon_0 \Delta_x} \left(H_y^{q+1/2}[m+1/2] - H_y^{q+1/2}[m-1/2] \right) - \\
 &\quad \underline{\underline{- \frac{\Delta_t}{\varepsilon \varepsilon_0} j_z^{q+1/2}[m]}}
 \end{aligned}$$

Основные единицы системы СИ

- Длина — м
- Масса — кг
- Время — с
- Сила тока — А
- Температура — К
- Количество вещества — моль
- Сила света — кд

$$\frac{\Delta_t}{\varepsilon \varepsilon_0} j_z^{q+1/2} \Rightarrow \left[\frac{c \cdot \mathcal{M} \cdot A}{\Phi \cdot \mathcal{M}^2} \right] = \left[\frac{c \cdot A}{\Phi \cdot \mathcal{M}} \right]$$

$$[\Phi] = \left[\frac{A^2 \cdot c^4}{\kappa \mathcal{L} \cdot \mathcal{M}^2} \right]$$

$$\frac{\Delta_t}{\varepsilon \varepsilon_0} j_z^{q+1/2} \Rightarrow \left[\frac{c \cdot \mathcal{M} \cdot A}{\Phi \cdot \mathcal{M}^2} \right] = \left[\frac{c \cdot A}{\Phi \cdot \mathcal{M}} \right] = \left[\frac{c \cdot A \cdot \kappa \mathcal{Z} \cdot \mathcal{M}^2}{\mathcal{M} \cdot A^2 \cdot c^4} \right] =$$

$$= \left[\frac{\mathcal{M} \cdot \kappa \mathcal{Z}}{A \cdot c^3} \right] = \left[\frac{B}{\mathcal{M}} \right]$$

$$[B] = \left[\frac{\mathcal{M}^2 \cdot \kappa \mathcal{Z}}{A \cdot c^3} \right]$$

Формулы для метода конечных разностей во временной области

$$H_y^{q+1/2}[m+1/2] = H_y^{q-1/2}[m+1/2] + \frac{\Delta_t}{\mu\mu_0\Delta_x} \left(E_z^q[m+1] - E_z^q[m] \right)$$

$$E_z^{q+1}[m] = E_z^q[m] + \frac{\Delta_t}{\varepsilon\varepsilon_0\Delta_x} \left(H_y^{q+1/2}[m+1/2] - H_y^{q+1/2}[m-1/2] \right) - \frac{\Delta_t}{\varepsilon\varepsilon_0} j_z^{q+1/2}[m]$$

Учет источника сигнала

$$E_z^{q+1}[m] \leftarrow E_z^q[m] + \frac{\Delta_t}{\varepsilon \varepsilon_0 \Delta_x} \left(H_y^{q+1/2}[m+1/2] - H_y^{q+1/2}[m-1/2] \right)$$

$$E_z^{q+1}[m] \leftarrow E_z^{q+1}[m] - \frac{\Delta_t}{\varepsilon \varepsilon_0} j_z^{q+1/2}[m]$$

ИЛИ

$$E_z^{q+1}[m] \leftarrow E_z^{q+1}[m] + E_{z \text{ CT}}^{q+1/2}[m]$$

Критерий устойчивости Куранта-Фридриха-Леви

$$v_{max} \Delta_t \leq \frac{1}{\sqrt{\Delta_x^{-2} + \Delta_y^{-2} + \Delta_z^{-2}}}$$

$$v_{max} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_{min} \mu_{min}}}$$

Критерий устойчивости Куранта-Фридриха-Леви

$$v_{max} \Delta_t \leq \frac{1}{\sqrt{\Delta_x^{-2} + \Delta_y^{-2} + \Delta_z^{-2}}}$$

$$v_{max} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_{min} \mu_{min}}}$$

Если $\Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = \Delta$

$$v_{max} \Delta_t \leq \frac{\Delta}{\sqrt{N}}$$

N — размерность пространства ($N = 1, 2, 3$)

Критерий устойчивости для одномерной задачи

$c\Delta_t$ — максимальное расстояние, которое может пройти волна за один временной шаг Δ_t в вакууме.

Число Куранта

$$S_c = c\Delta_t / \Delta_x$$

Условие устойчивости

$$c\Delta_t \leq \Delta_x$$

или

$$S_c \leq 1$$

Коэффициенты в конечно-разностной схеме

$$H_y^{q+1/2} [m+1/2] =$$

$$= H_y^{q-1/2} [m+1/2] + \frac{\Delta_t}{\mu \mu_0 \Delta_x} \left(E_z^q [m+1] - E_z^q [m] \right)$$

$$E_z^{q+1} [m] =$$

$$= E_z^q [m] + \frac{\Delta_t}{\varepsilon \varepsilon_0 \Delta_x} \left(H_y^{q+1/2} [m+1/2] - H_y^{q+1/2} [m-1/2] \right)$$

Коэффициенты в конечно-разностной схеме

$$\frac{1}{\mu \mu_0} \frac{\Delta_t}{\Delta_x} = \frac{1}{\mu \mu_0} \frac{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \frac{\Delta_t}{\Delta_x} = \frac{1}{\mu} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \frac{c \Delta_t}{\Delta_x} = \frac{1}{\mu W_0} S_c$$

$$W_0 = \sqrt{\mu_0 / \epsilon_0}$$

- волновое сопротивление свободного пространства

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$$

- скорость света в вакууме

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м}$$

$$\epsilon_0 = 1 / (\mu_0 c^2) = 8.85 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}$$

Коэффициенты в конечно-разностной схеме

$$\frac{1}{\varepsilon \varepsilon_0} \frac{\Delta_t}{\Delta_x} = \frac{1}{\varepsilon \varepsilon_0} \frac{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \frac{\Delta_t}{\Delta_x} = \frac{1}{\varepsilon} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \frac{c \Delta_t}{\Delta_x} = \frac{W_0}{\varepsilon} S_c$$

$$W_0 = \sqrt{\mu_0 / \varepsilon_0}$$

- волновое сопротивление свободного пространства

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$$

- скорость света в вакууме

Коэффициенты в конечно-разностной схеме

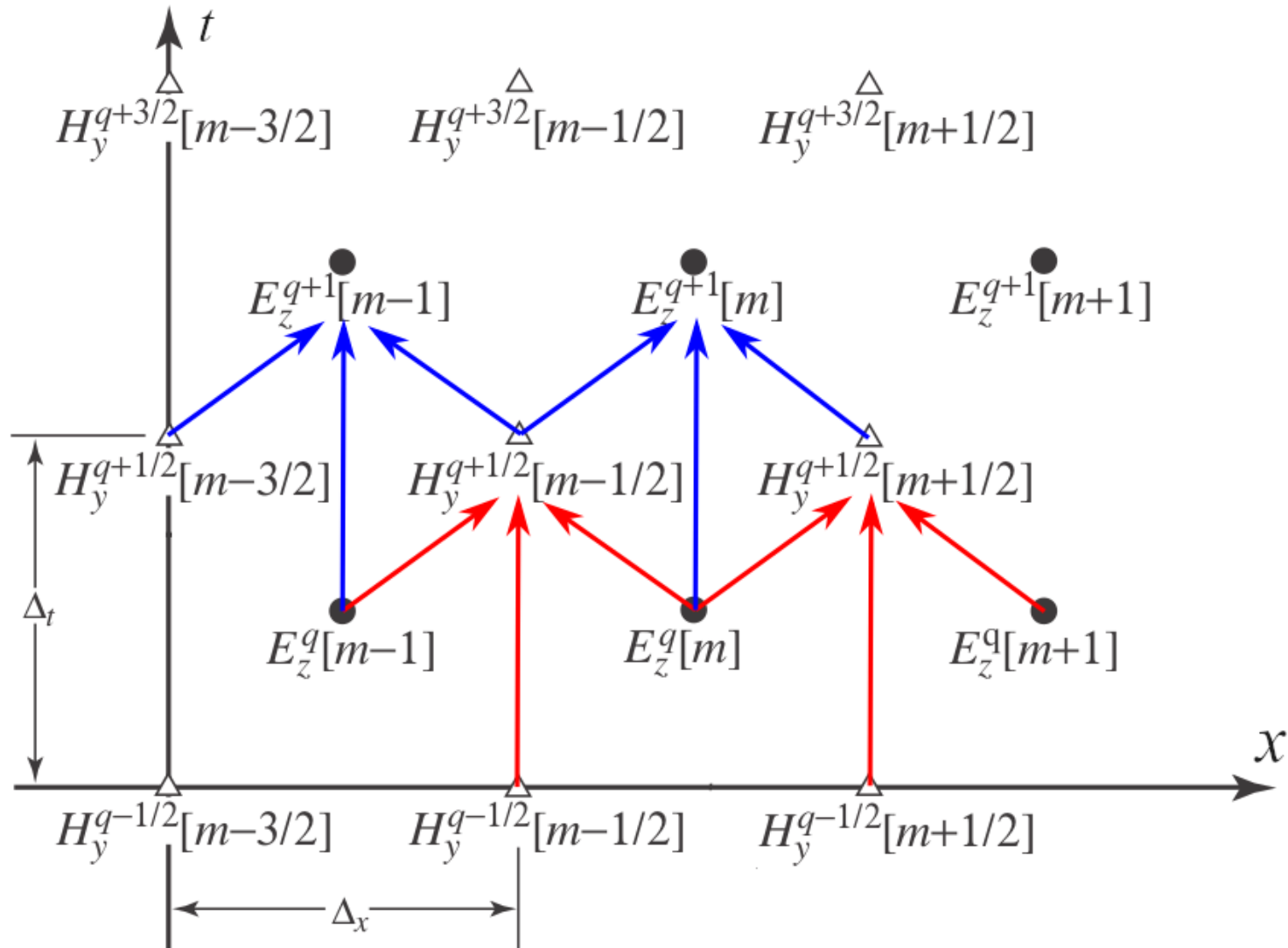
$$H_y^{q+1/2} [m+1/2] =$$

$$= H_y^{q-1/2} [m+1/2] + \left(E_z^q [m+1] - E_z^q [m] \right) \frac{1}{\mu W_0} S_c$$

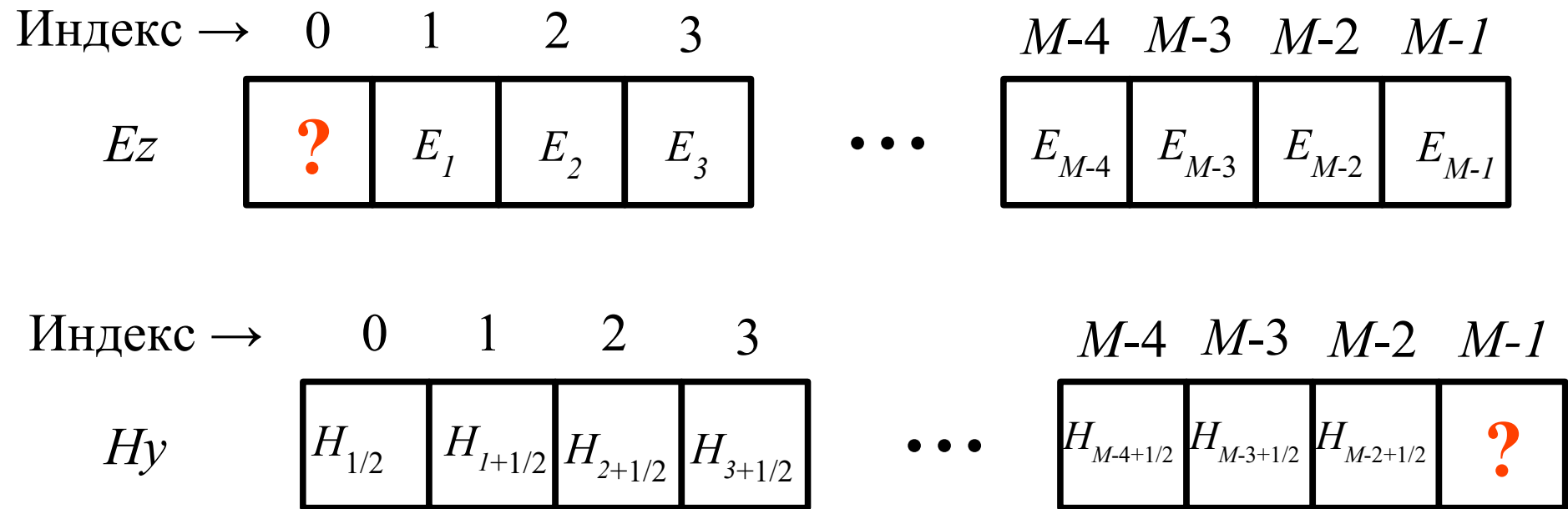
$$E_z^{q+1} [m] =$$

$$= E_z^q [m] + \left(H_y^{q+1/2} [m+1/2] - H_y^{q+1/2} [m-1/2] \right) \frac{W_0}{\varepsilon} S_c$$

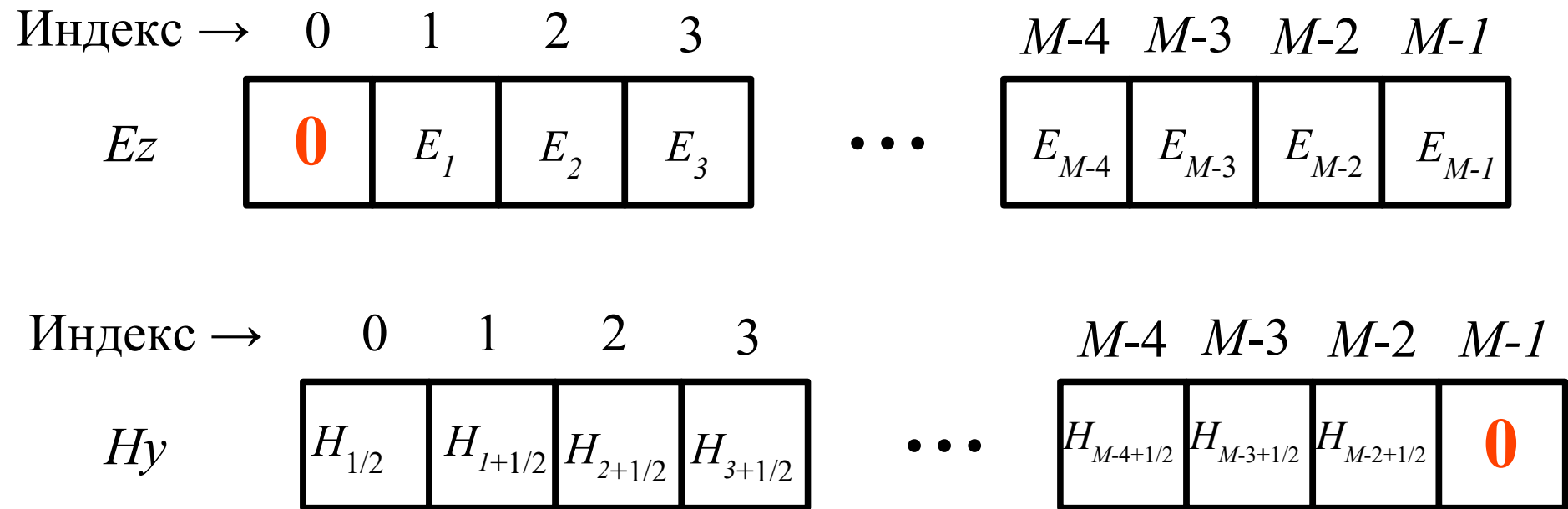
Расчет полей H_y и E_z в одномерном методе FDTD



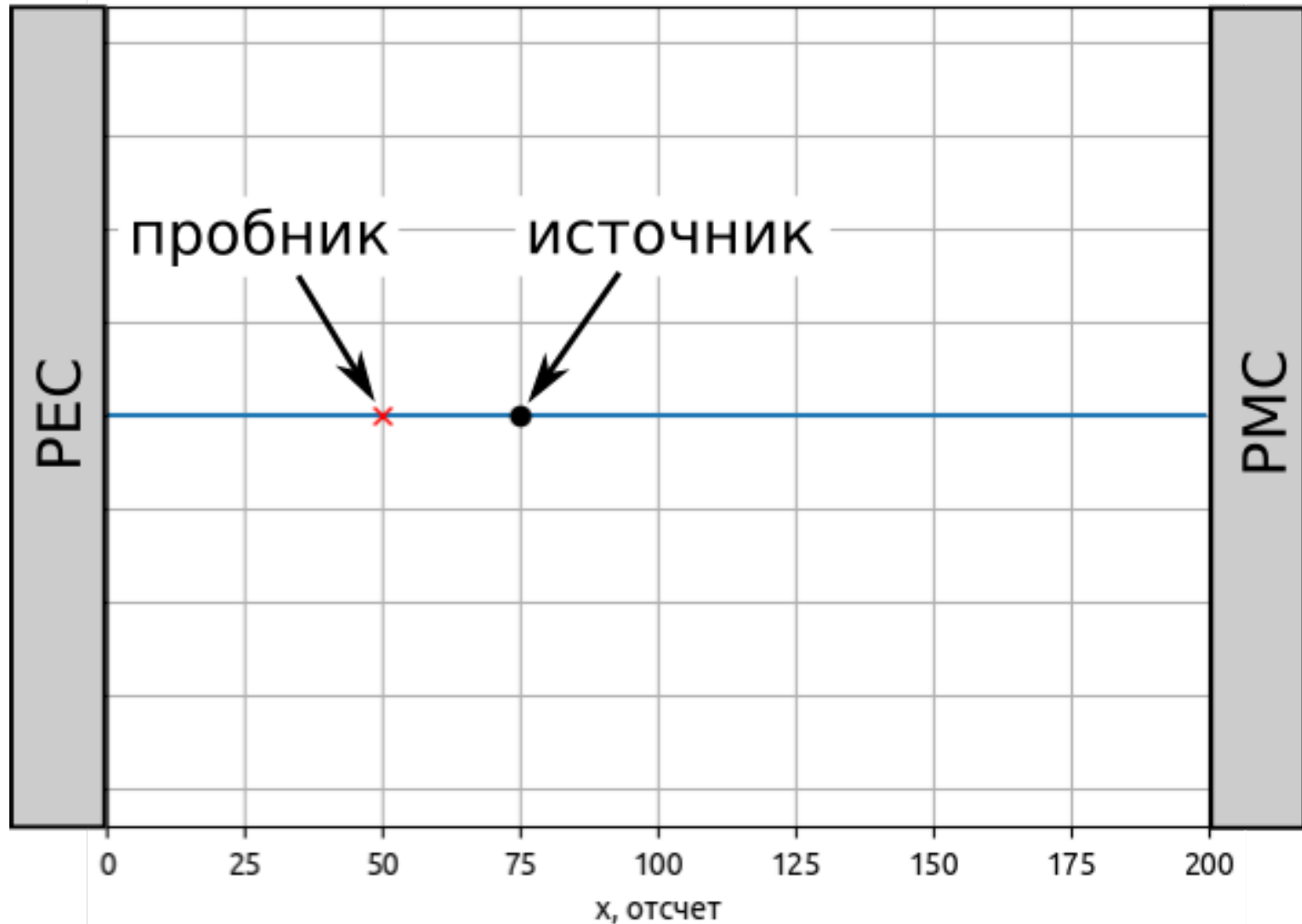
Хранение компонент поля в реализации FDTD



Хранение компонент поля в реализации FDTD



Геометрия задачи



Используемый источник

$$E_{\text{CT}}(t) = E_{\text{CT}}(q \Delta_t) = e^{-\left(\frac{q \Delta_t - 30 \Delta_t}{10 \Delta_t}\right)^2} = e^{-\left(\frac{q - 30}{10}\right)^2} = E_{\text{CT}}[q]$$

Схема алгоритма FDTD

Начало

Задание начальных условий $E_z^0, H_y^{1/2}$

Цикл по времени $q = [1 \dots \text{maxTime} - 1]$:

 Цикл по пространству $m = [0 \dots \text{maxSize} - 2]$:

 Расчет $H_y^{q+1/2}$

 Цикл по пространству $m = [1 \dots \text{maxSize} - 1]$:

 Расчет E_z^{q+1}

 Ввод поля с помощью источников возбуждения

Вывод результатов

Конец

Формулы для алгоритма FDTD

$$H_y^{q+1/2}[m+1/2] \leftarrow H_y^{q-1/2}[m+1/2] + \frac{\Delta_t}{\mu \mu_0 \Delta_x} (E_z^q[m+1] - E_z^q[m])$$

$$E_z^{q+1}[m] \leftarrow E_z^q[m] + \frac{\Delta_t}{\varepsilon \varepsilon_0 \Delta_x} (H_y^{q+1/2}[m+1/2] - H_y^{q+1/2}[m-1/2])$$

$$E_z^{q+1}[m] \leftarrow E_z^{q+1}[m] + E_{z \text{ CT}}^{q+1/2}[m]$$

Реализация одномерного FDTD на Python

Распространение импульса в свободном пространстве.

Число Куранта равно 1.

`fddt_first_version_01.py`

`fddt_first_version_02.py`

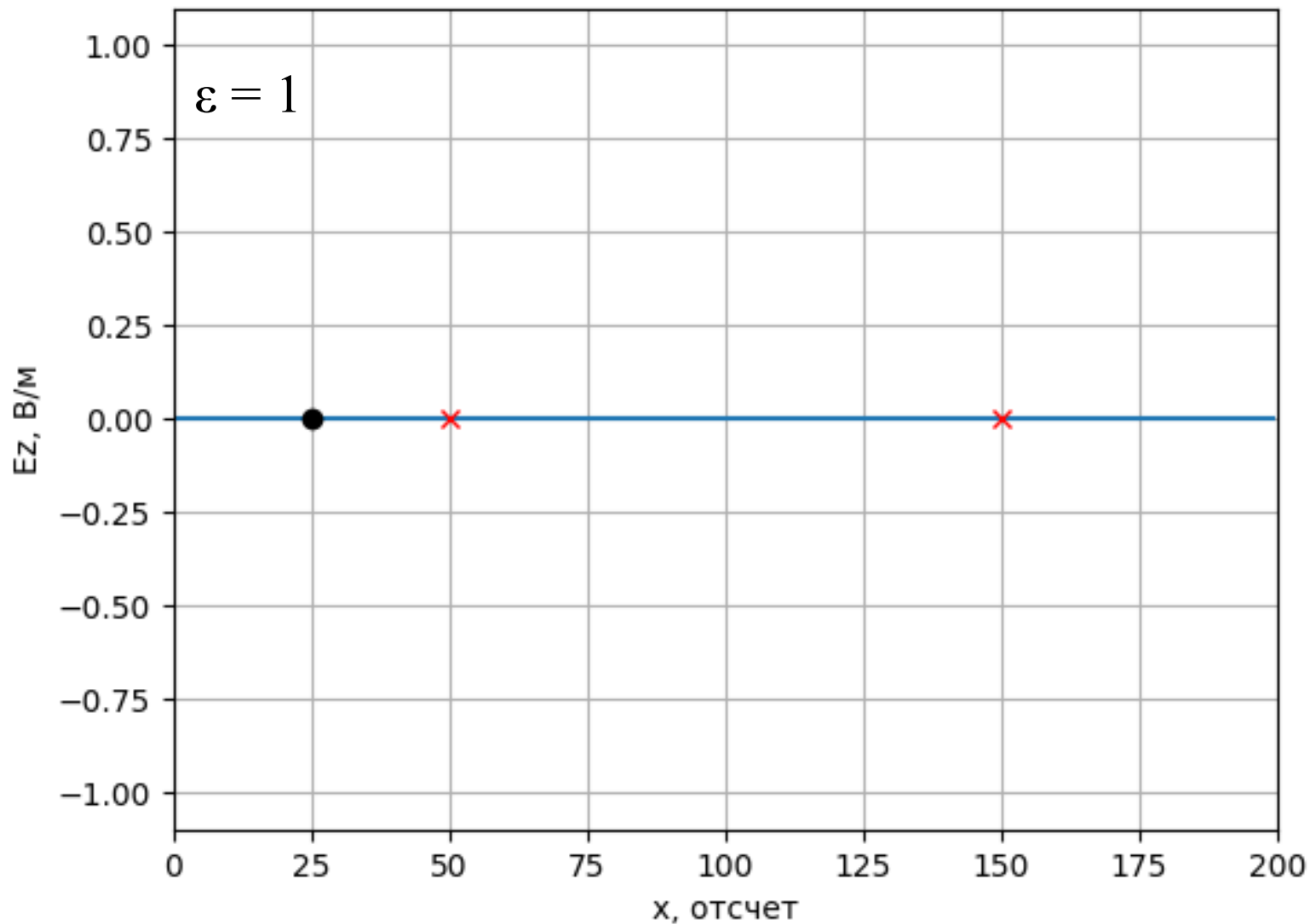
`fddt_first_version_03.py`

`fddt_first_version_04.py`

`fddt_first_version_05.py`

`fddt_first_version_06.py`

Измерение скорости распространения волны (`fdtd_first_version_speed.py`)



Измерение скорости распространения волны (fdtd_first_version_speed.py)

$$v = \frac{L}{t} = \frac{m \cdot \Delta x}{q \cdot \Delta t}$$

$$\Delta t = S_c \frac{\Delta x}{c}$$

$$v = \frac{m \cdot \Delta x \cdot c}{q \cdot S_c \cdot \Delta x} = \frac{m \cdot c}{q \cdot S_c}$$

Отображение компонент поля E и H

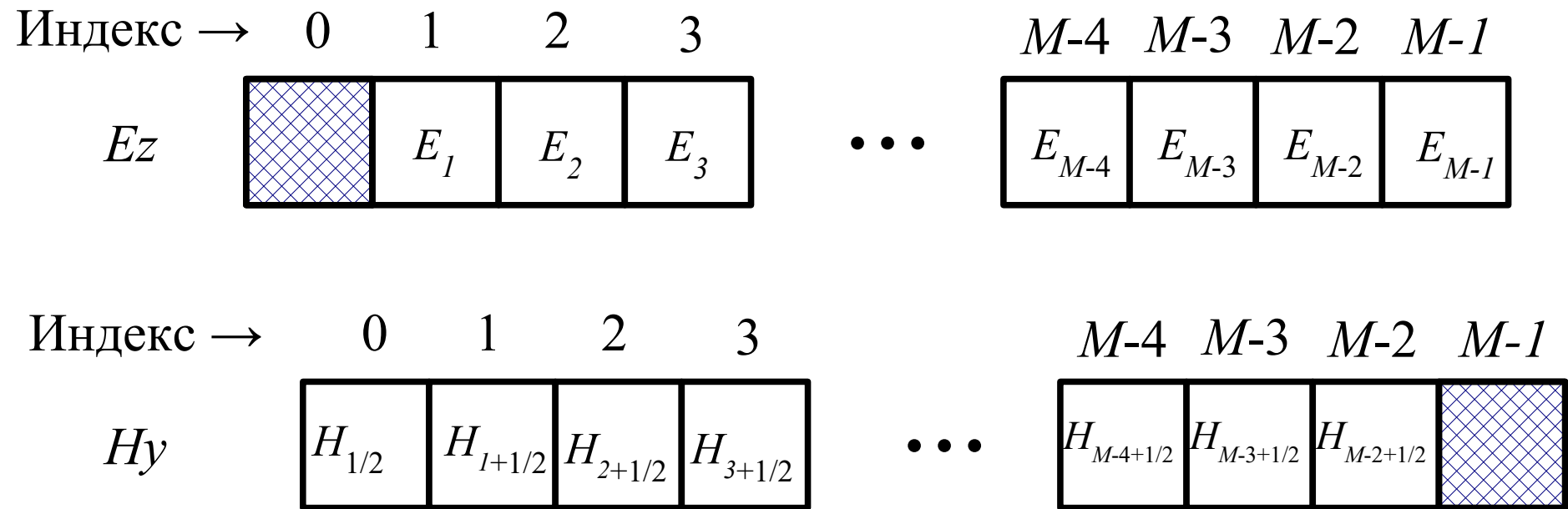
`fdtd_first_version_EH.py`

Достоверность расчета

- Скорость распространения волны в вакууме равна скорости света.
- Коэффициент отражения электрической компоненты поля от PEC равен -1 .
- Коэффициент отражения электрической компоненты поля от PMC равен $+1$.
- Коэффициент отражения магнитной компоненты поля от PEC равен $+1$.
- Коэффициент отражения магнитной компоненты поля от PMC равен -1 .

Простейшие поглощающие граничные условия

Хранение компонент поля в реализации FDTD



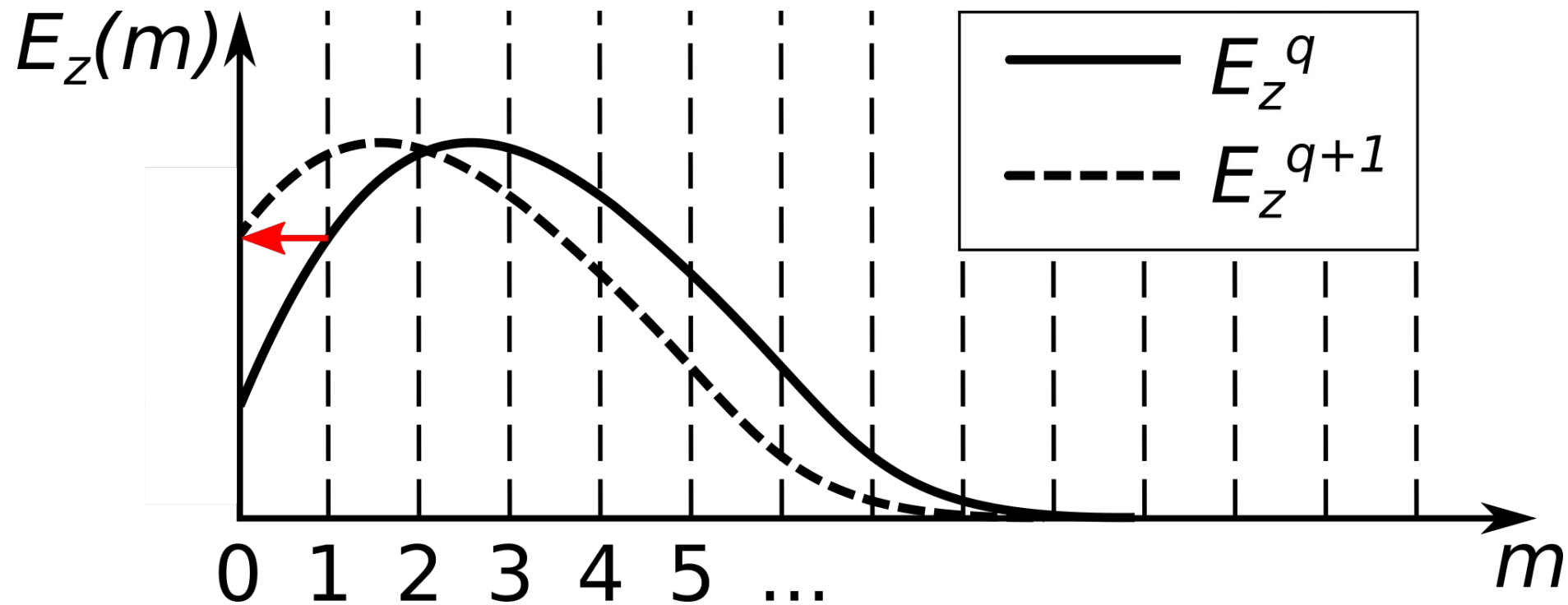
Простейшие поглощающие граничные условия

Работают только для $S_c = 1$

$$H_y^{q+1/2}[\text{end}] = H_y^{q-1/2}[\text{end}-1]$$

$$E_z^{q+1}[0] = E_z^q[1]$$

Простейшие поглощающие граничные условия



Демонстрация поглощающих условий