Московский Авиационный Институт
(национальный исследовательский университет)

«Метод конечных разностей во временной области (FDTD)»

Метод
Total-Field / Scattered-Field

Метод
Total-Field / Scattered-Field

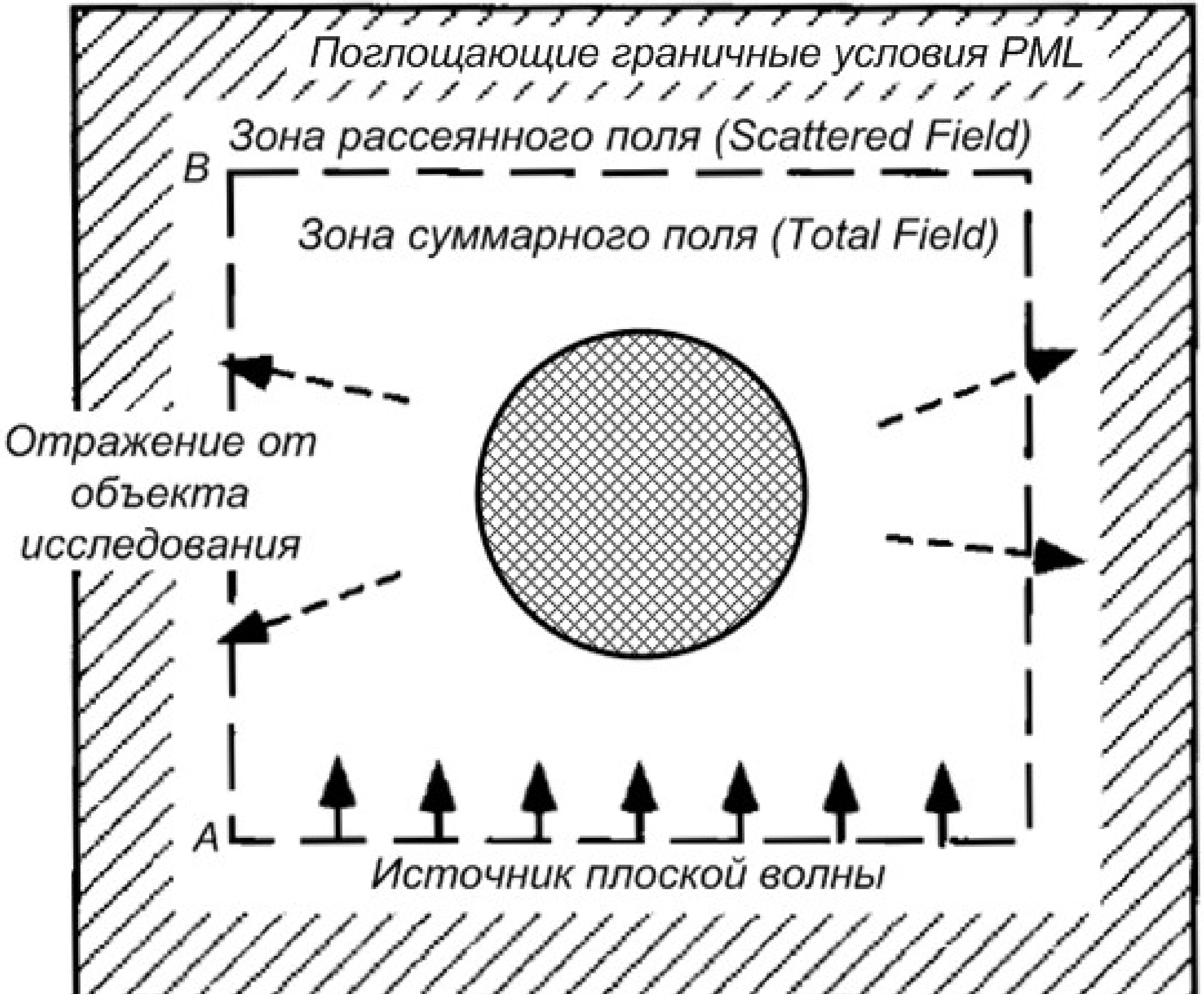
$$\mathbf{E}_{\text{полн}} = \mathbf{E}_{\text{пад}} + \mathbf{E}_{\text{расс}}$$

$$\mathbf{H}_{\text{полн}} = \mathbf{H}_{\text{пад}} + \mathbf{H}_{\text{расс}}$$

$\mathbf{E}_{\text{пад}}$, $\mathbf{H}_{\text{пад}}$ могут быть рассчитаны аналитически в любой момент времени в любой точке пространства.

$\mathbf{E}_{\text{расс}}$, $\mathbf{H}_{\text{расс}}$ изначально не известны. Рассчитываются с помощью метода FDTD.

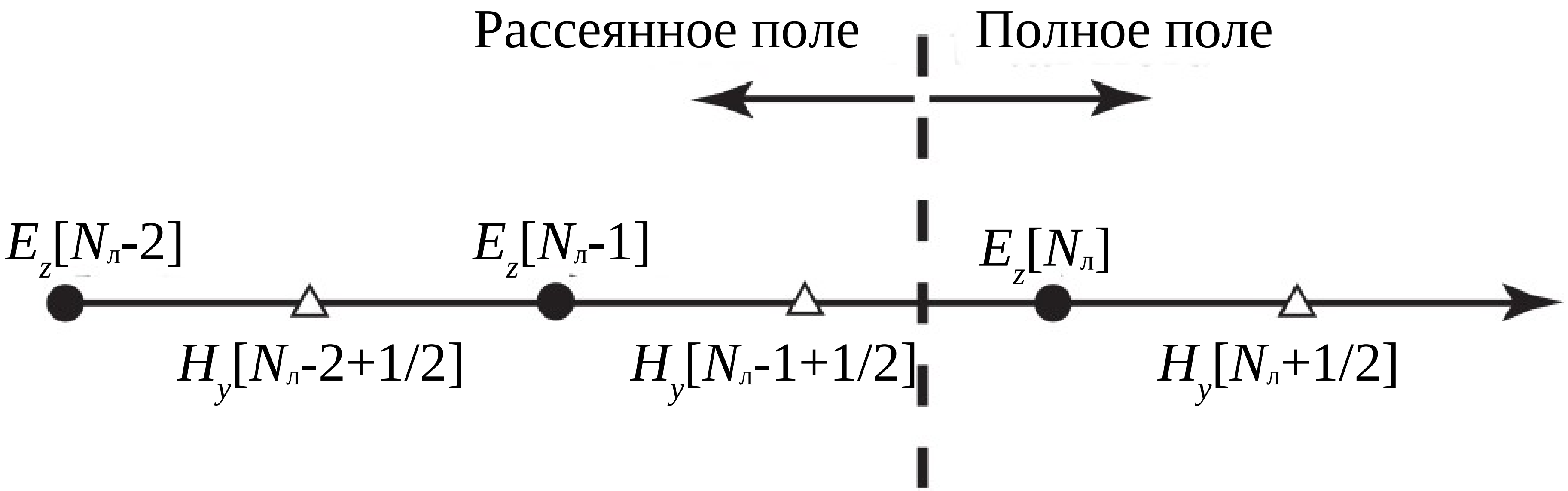
Метод Total-Field / Scattered-Field



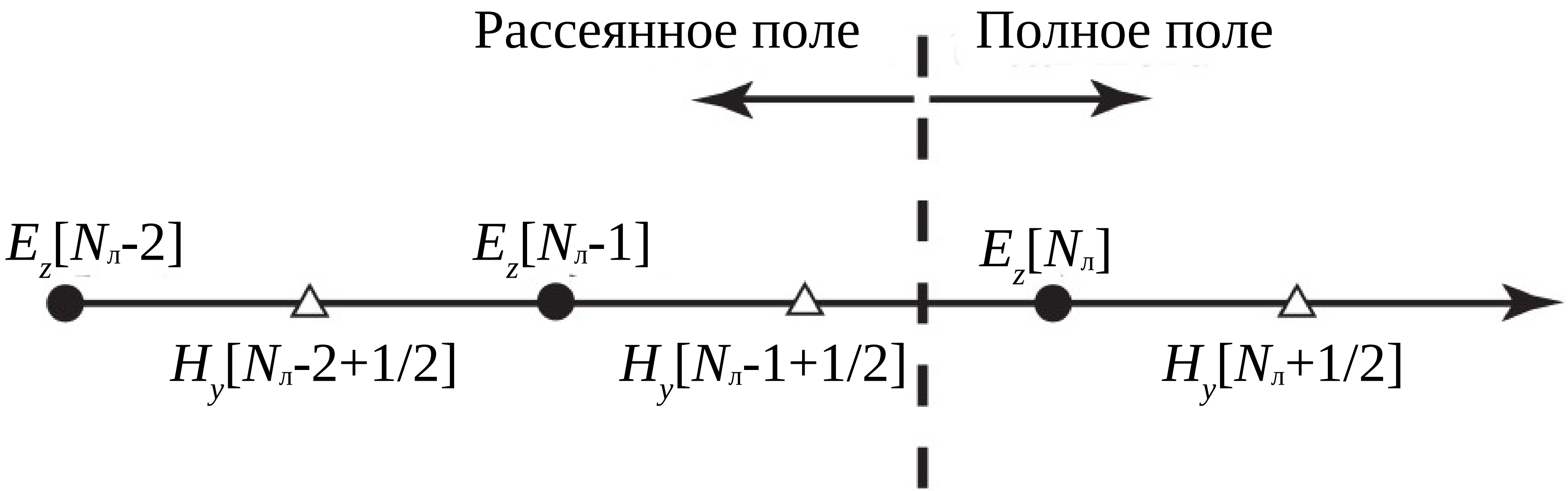
Метод Total-Field / Scattered-Field. Левая граница

$$\mathbf{E}_{\text{полн}} = \mathbf{E}_{\text{пад}} + \mathbf{E}_{\text{расс}}$$

$$\mathbf{H}_{\text{полн}} = \mathbf{H}_{\text{пад}} + \mathbf{H}_{\text{расс}}$$



Метод Total-Field / Scattered-Field. Левая граница



$H_y[N_л\text{-}1 + 1/2] = H_y[N_л - 1/2]$ — последняя ячейка в области рассеянного поля.

$E_z[N_л]$ — первая ячейка в области полного поля.

Метод
Total-Field / Scattered-Field

Важно! Только рассеянное поле должно использоваться при расчете поля в ячейках методом FDTD в области рассеянного поля.

Только полное поле должно использоваться при расчете поля в ячейках методом FDTD в области полного поля

Поле на левой границе
Total-Field / Scattered-Field

Рассмотрим электрическую компоненту поля E_z

проблема

$$\overbrace{E_z^{q+1}[N_л]}^{\text{полн.}} = \overbrace{E_z^{q}[N_л]}^{\text{полн.}} + \frac{\Delta_t}{\varepsilon\varepsilon_0\Delta_x}\left(\overbrace{H_y^{q+1/2}[N_л+1/2]}^{\text{полн.}} - \overbrace{H_y^{q+1/2}[N_л-1/2]}^{\text{расс.}}\right)$$

Поле на левой границе Total-Field / Scattered-Field

Введем дополнительный магнитный источник в точке (N − 1/2)Δx

$$\overbrace{E_z^{q+1}[N_л]}^{\text{полн.}} = \overbrace{E_z^{q}[N_л]}^{\text{полн.}} +$$

$$+\frac{\Delta_t}{\varepsilon\varepsilon_0\Delta_x}\left(\overbrace{H_y^{q+1/2}[N_л+1/2]}^{\text{полн.}} - \left\{\overbrace{H_y^{q+1/2}[N_л-1/2]}^{\text{расс.}} + H_{y\,\text{пад}}^{q+1/2}[N_л-1/2]\right\}\right)$$

Поле на левой границе Total-Field / Scattered-Field

$$\overbrace{E_z^{q+1}[N_{\text{л}}]}^{\text{полн.}} = \overbrace{E_z^{q}[N_{\text{л}}]}^{\text{полн.}} +$$

$$+\frac{\Delta_t}{\varepsilon\varepsilon_0\Delta_x}\left(\overbrace{H_y^{q+1/2}[N_{\text{л}}+1/2]}^{\text{полн.}} - \left\{\overbrace{H_y^{q+1/2}[N_{\text{л}}-1/2]}^{\text{расс.}} + \left(-\frac{1}{W}E_{z\,\text{пад}}^{q+1/2}[N_{\text{л}}-1/2]\right)\right\}\right)$$

Total-Field / Scattered-Field
Левая граница

$$E_z^{q+1}[N_л] \leftarrow E_z^q[N_л] + \frac{\Delta_t}{\varepsilon\,\varepsilon_0\,\Delta_x}\left(H_y^{q+1/2}[N_л + 1/2] - H_y^{q+1/2}[N_л - 1/2]\right)$$

$$\boxed{E_z^{q+1}[N_л] \leftarrow E_z^{q+1}[N_л] + \frac{\Delta_t}{\varepsilon\,\varepsilon_0\,\Delta_x}\,\frac{1}{W}\,E_{z\,\text{пад}}^{q+1/2}[N_л - 1/2]}$$

Total-Field / Scattered-Field
Левая граница

$$E_z^{q+1}[N_л] = E_z^{q+1}[N_л] + \frac{\Delta_t}{\varepsilon\varepsilon_0\Delta_x}\frac{1}{W} E_{z\,пад}^{q+1/2}[N_л - 1/2]$$

$$W = \sqrt{\frac{\mu\mu_0}{\varepsilon\varepsilon_0}} = W_0\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$$

$$\frac{\Delta_t}{\varepsilon\varepsilon_0\Delta_x} = \frac{W_0 S_c}{\varepsilon}$$

$$E_z^{q+1}[N_л] = E_z^{q+1}[N_л] + \frac{S_c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} E_{z\,пад}^{q+1/2}[N_л - 1/2]$$

Для свободного пространства и если $S_c = 1$:

$$E_z^{q+1}[N_л] = E_z^{q+1}[N_л] + E_{z\,пад}^{q+1/2}[N_л - 1/2]$$

Поле на левой границе Total-Field / Scattered-Field

проблема

$$\overbrace{H_y^{q+1/2}[N_л - 1/2]}^{\text{расс.}} = \overbrace{H_y^{q-1/2}[N_л - 1/2]}^{\text{расс.}} + \frac{\Delta_t}{\mu\mu_0\Delta_x}\left(\overbrace{E_z^q[N_л]}^{\text{полн.}} - \overbrace{E_z^q[N_л - 1]}^{\text{расс.}}\right)$$

Поле на левой границе Total-Field / Scattered-Field

$$\overbrace{H_y^{q+1/2}\left[N_{\text{л}}-1/2\right]}^{\text{расс.}}=\overbrace{H_y^{q-1/2}\left[N_{\text{л}}-1/2\right]}^{\text{расс.}}+$$

$$+\frac{\Delta_t}{\mu\mu_0\Delta_x}\left(\overbrace{\left(\overbrace{E_z^q\left[N_{\text{л}}\right]}^{\text{полн.}}-E_{z\,\text{пад}}^q\left[N_{\text{л}}\right]\right)}^{\text{расс.}}-\overbrace{E_z^q\left[N_{\text{л}}-1\right]}^{\text{расс.}}\right)$$

Total-Field / Scattered-Field
Левая граница

$$H_y^{q+1/2}[N_л-1/2] \leftarrow H_y^{q-1/2}[N_л-1/2] + \frac{\Delta_t}{\mu\mu_0\Delta_x}\left(E_z^q[N_л] - E_z^q[N_л-1]\right)$$

$$\boxed{H_y^{q+1/2}[N_л-1/2] \leftarrow H_y^{q+1/2}[N_л-1/2] - \frac{\Delta_t}{\mu\mu_0\Delta_x} E_{z\ пад}^q[N_л]}$$

или

$$\boxed{H_y^{q+1/2}[N_л-1/2] \leftarrow H_y^{q+1/2}[N_л-1/2] - \frac{S_c}{W_0\mu} E_{z\ пад}^q[N_л]}$$

Total-Field / Scattered-Field
Левая граница

Для свободного пространства и $S_c = 1$:

$$H_y^{q+1/2}[N_л - 1/2] \leftarrow H_y^{q-1/2}[N_л - 1/2] + \frac{1}{W_0}\left(E_z^q[N_л] - E_z^q[N_л - 1]\right)$$

$$H_y^{q+1/2}[N_л - 1/2] \leftarrow H_y^{q+1/2}[N_л - 1/2] - \frac{1}{W_0} E_{z\,пад}^q[N_л]$$

Total-Field / Scattered-Field
Левая граница

$$H_y^{q+1/2}[N_л - 1/2] \leftarrow H_y^{q+1/2}[N_л - 1/2] - \frac{\Delta_t}{\mu\mu_0\Delta_x} E_{z\ пад}^{q}[N_л]$$

$$E_z^{q+1}[N_л] \leftarrow E_z^{q+1}[N_л] + \frac{\Delta_t}{\varepsilon\varepsilon_0\Delta_x}\frac{1}{W} E_{z\ пад}^{q+1/2}[N_л - 1/2]$$

Total-Field / Scattered-Field
Левая граница

$$H_y^{q+1/2}[N_л - 1/2] \leftarrow H_y^{q+1/2}[N_л - 1/2] - \frac{S_c}{W_0 \mu} E^q_{z\,пад}[N_л]$$

$$E_z^{q+1}[N_л] \leftarrow E_z^{q+1}[N_л] + \frac{S_c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} E^{q+1/2}_{z\,пад}[N_л - 1/2]$$

Total-Field / Scattered-Field

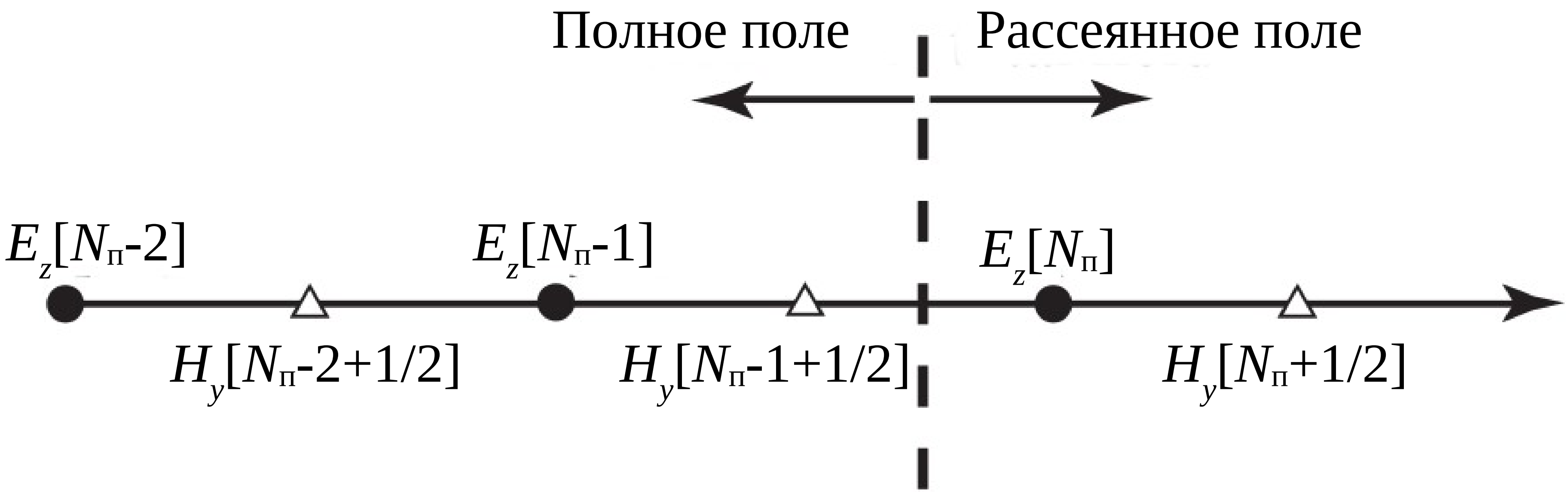
Левая граница

$S_c = 1$

$$H_y^{q+1/2}\left[N_{\text{л}}-1/2\right] \leftarrow H_y^{q+1/2}\left[N_{\text{л}}-1/2\right] - \frac{1}{W_0} E_{z\,\text{пад}}^{q}\left[N_{\text{л}}\right]$$

$$E_z^{q+1}\left[N_{\text{л}}\right] \leftarrow E_z^{q+1}\left[N_{\text{л}}\right] + E_{z\,\text{пад}}^{q+1/2}\left[N_{\text{л}}-1/2\right]$$

Total-Field / Scattered-Field. Правая граница



$H_y[N_п\text{-}1 + 1/2] = H_y[N_п - 1/2]$ — последняя ячейка в области полного поля.

$E_z[N_п]$ — первая ячейка в области рассеянного поля.

Total-Field / Scattered-Field. Правая граница

$$H_y^{q+1/2}[N_\text{п}-1/2] \leftarrow H_y^{q+1/2}[N_\text{п}-1/2] + \frac{\Delta_t}{\mu\mu_0\Delta_x} E_{z\ \text{пад}}^{q}[N_\text{п}]$$

$$E_z^{q+1}[N_\text{п}] \leftarrow E_z^{q+1}[N_\text{п}] - \frac{\Delta_t}{\varepsilon\varepsilon_0\Delta_x}\frac{1}{W} E_{z\ \text{пад}}^{q+1/2}[N_\text{п}-1/2]$$

Total-Field / Scattered-Field. Правая граница

$$H_y^{q+1/2}[N_п - 1/2] \leftarrow H_y^{q+1/2}[N_п - 1/2] + \frac{S_c}{W_0 \mu} E_{z\ пад}^{q}[N_п]$$

$$E_z^{q+1}[N_п] \leftarrow E_z^{q+1}[N_п] - \frac{S_c}{\sqrt{\varepsilon \mu}} E_{z\ пад}^{q+1/2}[N_п - 1/2]$$

Total-Field / Scattered-Field

Правая граница
$S_c = 1$

$$H_y^{q+1/2}[N_\text{п}-1/2] \leftarrow H_y^{q+1/2}[N_\text{п}-1/2] + \frac{1}{W_0} E^q_{z\ \text{пад}}[N_\text{п}]$$

$$E_z^{q+1}[N_\text{п}] \leftarrow E_z^{q+1}[N_\text{п}] - E^{q+1/2}_{z\ \text{пад}}[N_\text{п}-1/2]$$

Схема алгоритма FDTD с использованием метода Total Field / Scattered field

Начало

Задание начальных условий $E_z^{\,0}$, $H_y^{\,1/2}$

Цикл по времени q = [0...maxTime - 1]:

Цикл по пространству m = [0...maxSize - 2]:

Расчет $H_y^{\,q+1/2}$

Ввод поля $\mathbf{H^{q}_{пад}[N]}$

Цикл по пространству m = [1...maxSize - 1]:

Расчет $E_z^{\,q+1}$

Ввод поля $\mathbf{E^{q+1/2}_{пад}[N-1/2]}$

Вывод результатов

Конец

Уравнение плоской волны для гауссова сигнала

Волновое уравнение

Волновое уравнение при отсутствии сторонних токов:

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \qquad \nabla^2 \mathbf{H} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = 0$$

Одномерное волновое уравнение

f — одномерная функция

$$\nabla^2 f - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial t^2} = 0$$

Решение одномерного волнового уравнения

$f(\xi)$ — решение волнового уравнения, если:

- $f(\xi)$ дважды дифференцируема
- ξ можно заменить на $t \pm x / v$

  (для одномерного случая)

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu \mu_0 \varepsilon \varepsilon_0}}$$

Гауссов импульс

$$f(t) = A \cdot e^{-\left(\frac{t - d_g \Delta_t}{w_g \Delta_t}\right)^2}$$

Гауссов импульс в дискретной форме

Делаем замену *t* на *t* - *x* / *v*

$$t-\frac{x}{v}=q\Delta_t-\frac{m\Delta_x}{v}=q\Delta_t-\frac{m\Delta_x\sqrt{\varepsilon\mu}}{c}=$$

$$=\left(q-\frac{m\Delta_x\sqrt{\varepsilon\mu}}{c\Delta_t}\right)\Delta_t=\left(q-\frac{m\sqrt{\varepsilon\mu}}{S_c}\right)\Delta_t$$

Для свободного пространства и $S_c = 1$:

$$t-\frac{x}{c}=(q-m)\Delta_t$$

Уравнение плоской волны в форме гауссова импульса в дискретном виде

$$E_{z\ \text{пад}}^{q}[m] = A \cdot e^{-\left(\frac{\left(q - m\sqrt{\varepsilon\mu}/S_c\right)\Delta_t - d_g \Delta_t}{w_g \Delta_t}\right)^2} = A \cdot e^{-\left(\frac{\left(q - m\sqrt{\varepsilon\mu}/S_c\right) - d_g}{w_g}\right)^2}$$

$$H_{y\ \text{пад}}^{q}[m] = -\frac{A}{W} E_{z\ \text{пад}}^{q}[m] = -\frac{A}{W} e^{-\left(\frac{\left(q - m\sqrt{\varepsilon\mu}/S_c\right) - d_g}{w_g}\right)^2}$$

Уравнение плоской волны в форме гауссова импульса в дискретном виде

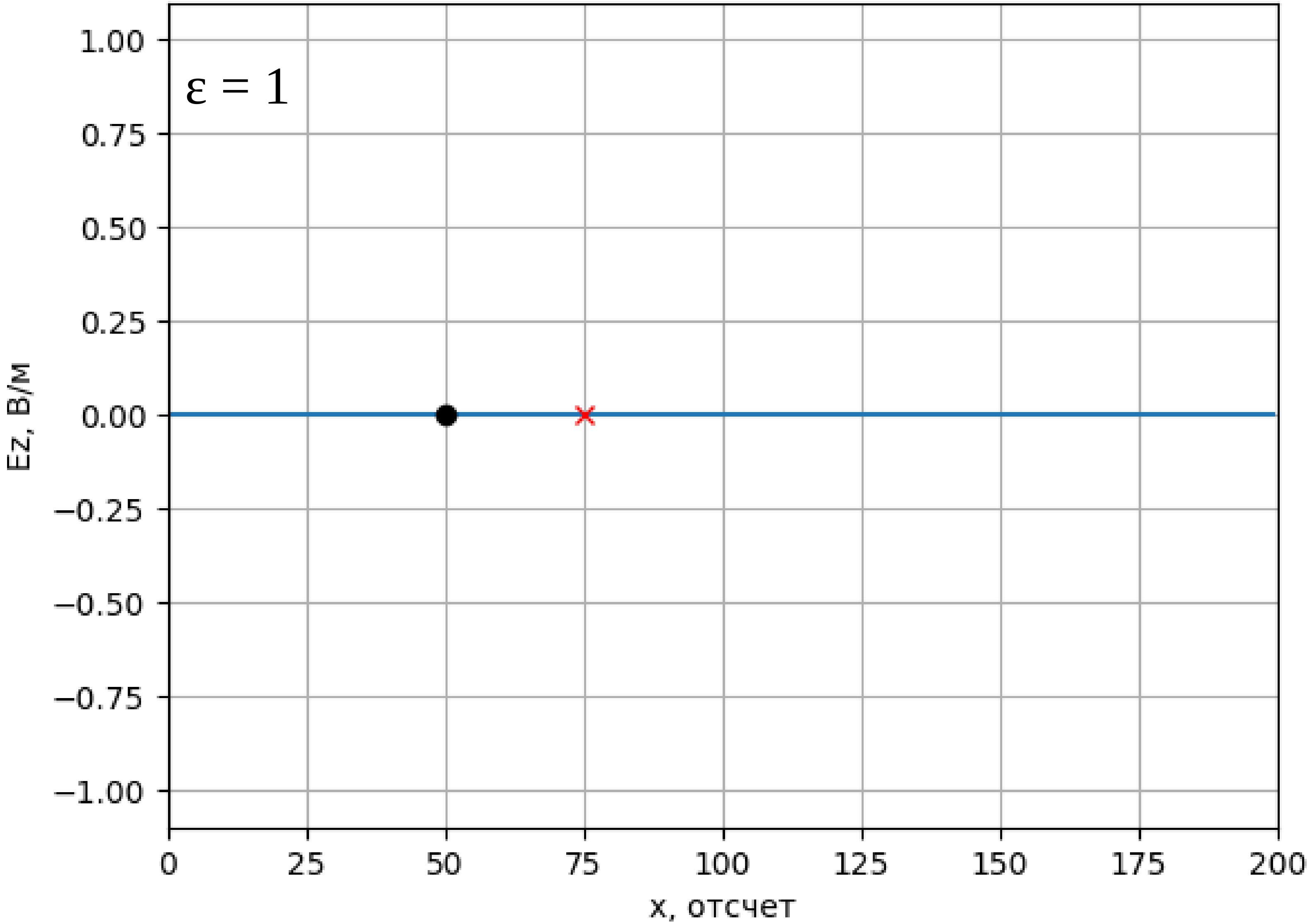
Для свободного пространства и $S_c = 1$:

$$E_{z\ \text{пад}}^{q}[m] = A \cdot e^{-\left(\frac{(q-m)\Delta_t - d_g\Delta_t}{w_g\Delta_t}\right)^2} = A \cdot e^{-\left(\frac{(q-m)-d_g}{w_g}\right)^2}$$

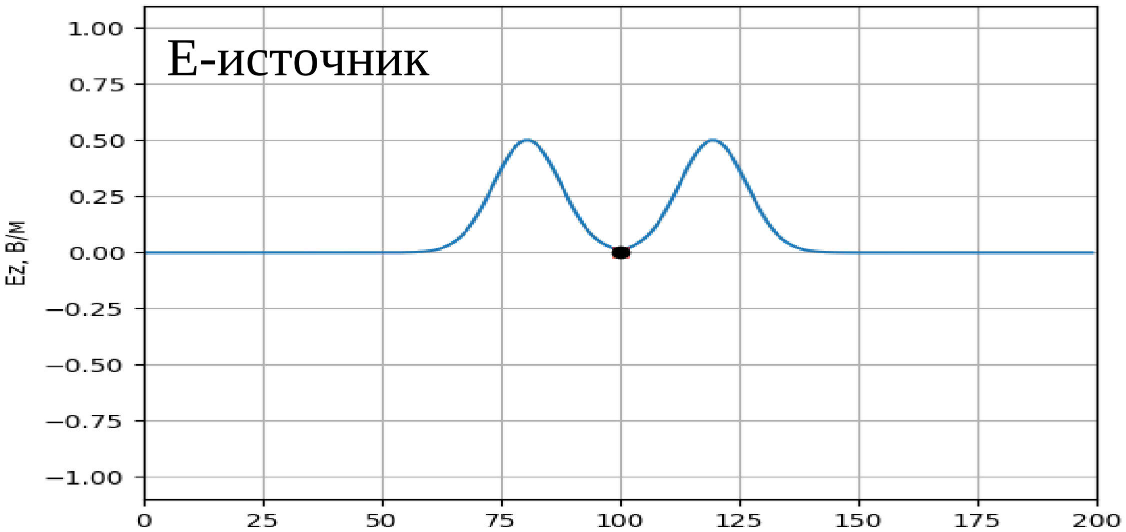
$$H_{y\ \text{пад}}^{q}[m] = -\frac{A}{W_0} E_{z\ \text{пад}}^{q}[m] = -\frac{A}{W_0} e^{-\left(\frac{(q-m)-d_g}{w_g}\right)^2}$$

Демонстрация метода Total Field / Scattered Field

Демонстрация метода TFSF (fdtd_tfsf_gauss.py)



Источники при использовании метода полного поля / рассеянного поля. Левая граница



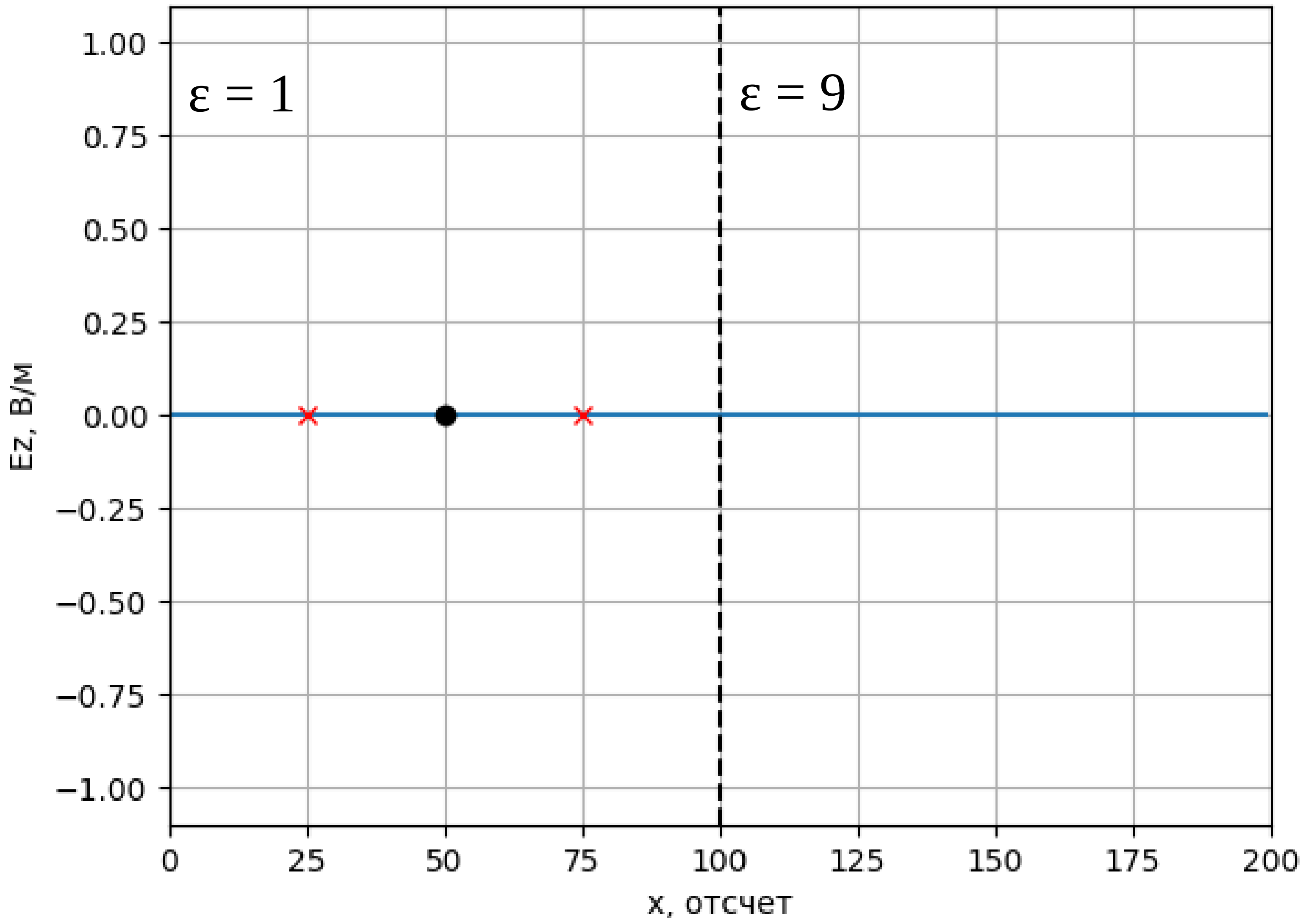
Поле на границе Total-Field / Scattered-Field

Пусть для введенного источника x = 0 соответствует N-й ячейке

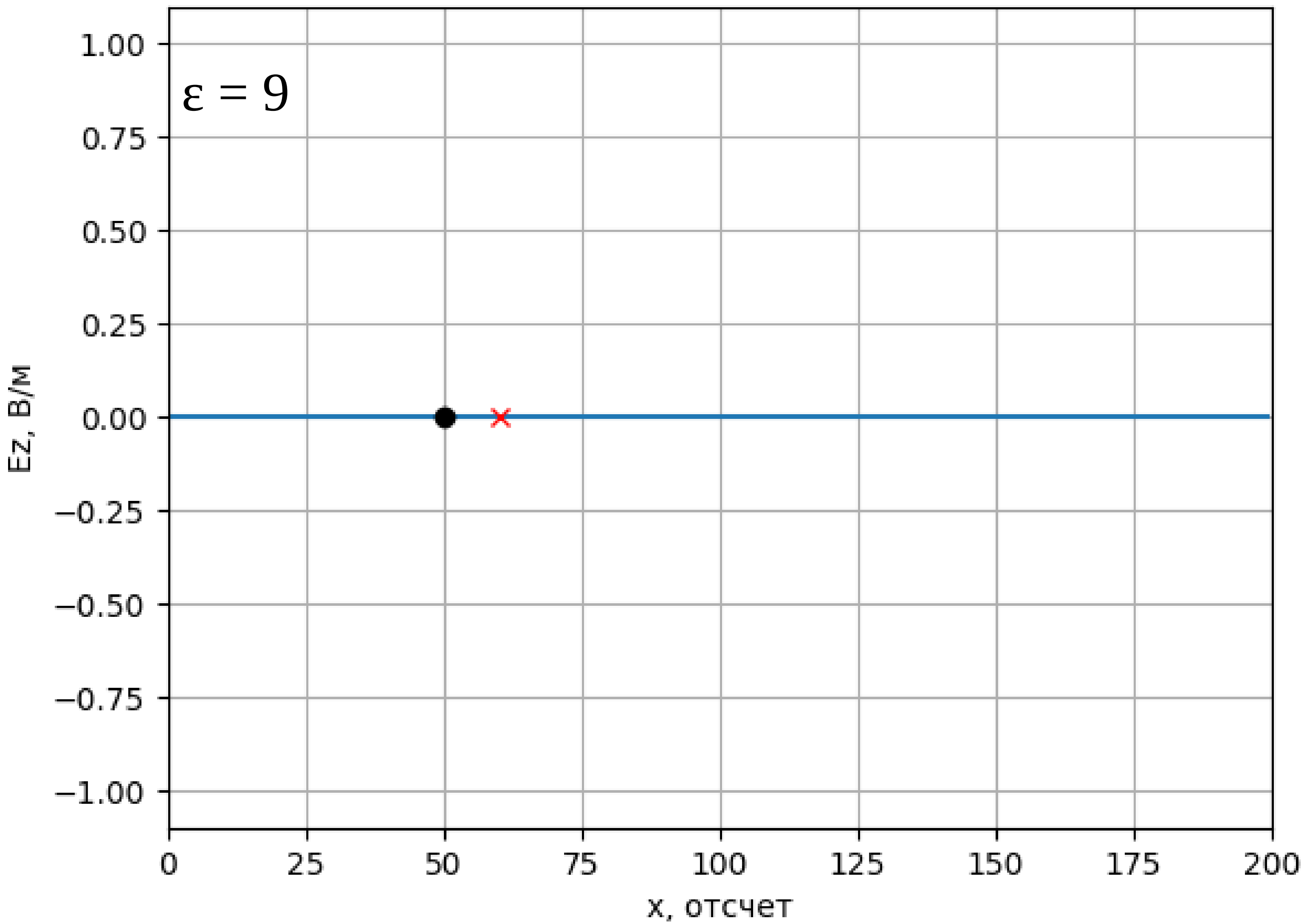
$$H_y^{q+1/2}[N-1/2] = H_y^{q+1/2}[N-1/2] - \frac{1}{W_0} E_{z.\text{пад}}^{q}[0]$$

$$E_z^{q+1}[N] = E_z^{q+1}[N] + E_{z.\text{пад}}^{q+1/2}[-1/2]$$

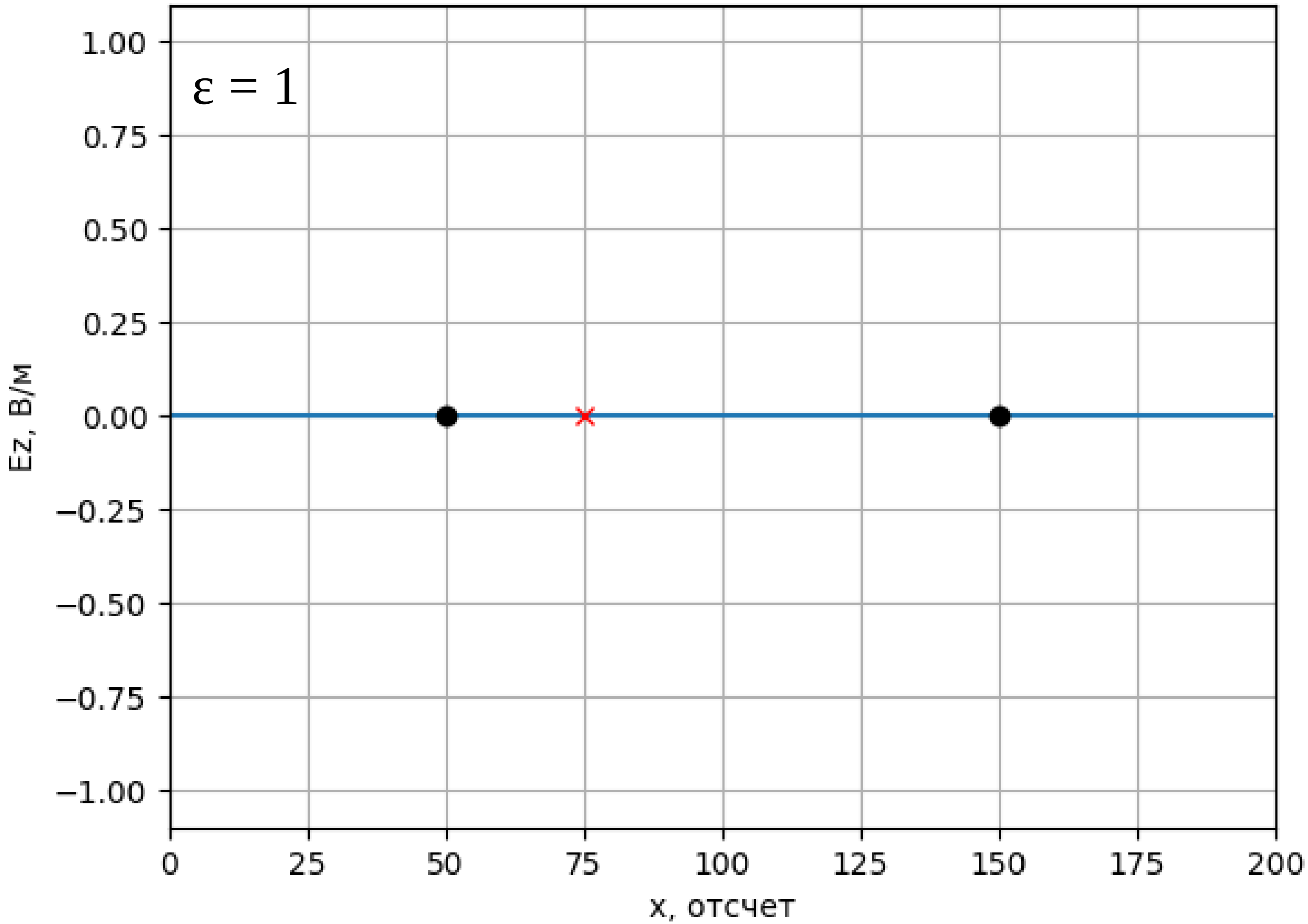
Распространение электромагнитной волны в неоднородных средах с использованием метода TFSF (fdtd_tfsf_heterogen.py)



Метод Total Field / Scattered Field с источником, расположенным в диэлектрике (fdtd_tfsf_medium_gauss.py)



Метод Total Field / Scattered Field с использованием двух границ (fdtd_tfsf_left_right_gauss.py)



Метод Total Field / Scattered Field с использованием двух границ (fdtd_tfsf_left_right_gauss_pec.py)