

**Московский Авиационный Институт
(национальный исследовательский университет)**

«Метод конечных разностей во временной области (FDTD)»

**Моделирование
распространения
электромагнитной волны в
среде с потерями**

Закон Ампера для среды с потерями

При $\mathbf{j}_{\text{ст}} = 0$

$$\mathbf{j} + \varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \nabla \times \mathbf{H}$$

или

$$\sigma \mathbf{E} + \varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \nabla \times \mathbf{H}$$

Закон Ампера для среды с потерями

Для одномерного случая:

$$\sigma E_z + \varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{\partial H_y}{\partial x}$$

Закон Ампера для среды с потерями в дискретном виде

Запишем производные в дискретном виде
для точки $(m\Delta_x; (q + 1/2)\Delta_t)$:

Закон Ампера для среды с потерями в дискретном виде

Запишем производные в дискретном виде
для точки $(m\Delta_x; (q + 1/2)\Delta_t)$:

$$\begin{aligned} \sigma E_z^{q+1/2}[m] + \varepsilon \varepsilon_0 \frac{E_z^{q+1}[m] - E_z^q[m]}{\Delta_t} &= \\ &= \frac{H_y^{q+1/2}[m+1/2] - H_y^{q+1/2}[m-1/2]}{\Delta_x} \end{aligned}$$

Закон Ампера для среды с потерями в дискретном виде

проблема

$$\sigma E_z^{q+1/2}[m] + \varepsilon \varepsilon_0 \frac{E_z^{q+1}[m] - E_z^q[m]}{\Delta_t} =$$

$$= \frac{H_y^{q+1/2}[m+1/2] - H_y^{q+1/2}[m-1/2]}{\Delta_x}$$

$$E_z^{q+1/2}[m] \approx \frac{E_z^{q+1}[m] + E_z^q[m]}{2}$$

Закон Ампера для среды с потерями в дискретном виде

$$E_z^{q+1/2}[m] \approx \frac{E_z^{q+1}[m] + E_z^q[m]}{2}$$

тогда:

$$\begin{aligned} \sigma \frac{E_z^{q+1}[m] + E_z^q[m]}{2} + \varepsilon \varepsilon_0 \frac{E_z^{q+1}[m] - E_z^q[m]}{\Delta_t} &= \\ = \frac{H_y^{q+1/2}[m+1/2] - H_y^{q+1/2}[m-1/2]}{\Delta_x} \end{aligned}$$

Расчет электрической компоненты поля для среды с потерями

$$E_z^{q+1}[m] = \frac{1 - \frac{\sigma \Delta_t}{2 \varepsilon \varepsilon_0}}{1 + \frac{\sigma \Delta_t}{2 \varepsilon \varepsilon_0}} E_z^q[m] +$$

$$+ \frac{\frac{\Delta_t}{\varepsilon \varepsilon_0} \Delta_x}{1 + \frac{\sigma \Delta_t}{2 \varepsilon \varepsilon_0}} \left(H_y^{q+1/2}[m+1/2] - H_y^{q+1/2}[m-1/2] \right)$$

Расчет электрической компоненты поля для среды с потерями

$$\begin{aligned}
 E_z^{q+1}[m] = & \frac{1 - \frac{\sigma \Delta_t}{2 \varepsilon \varepsilon_0}}{1 + \frac{\sigma \Delta_t}{2 \varepsilon \varepsilon_0}} E_z^q[m] + \\
 & + \frac{\frac{\Delta_t}{\varepsilon \varepsilon_0} \Delta_x}{1 + \frac{\sigma \Delta_t}{2 \varepsilon \varepsilon_0}} \left(H_y^{q+1/2}[m+1/2] - H_y^{q+1/2}[m-1/2] \right)
 \end{aligned}$$

Расчет электрической компоненты поля для среды с потерями

$$E_z^{q+1}[m] = \underline{C_{E_z E}} E_z^q[m] + \underline{C_{E_z H}} \left(H_y^{q+1/2}[m+1/2] - H_y^{q+1/2}[m-1/2] \right)$$

Расчет электрической компоненты поля для среды с потерями

Для случая $\sigma = 0$ См/м:

$$E_z^{q+1}[m] = \\ = E_z^q[m] + \frac{\Delta_t}{\varepsilon \varepsilon_0 \Delta_x} \left(H_y^{q+1/2}[m+1/2] - H_y^{q+1/2}[m-1/2] \right)$$

Закон Фарадея для среды с потерями

$$-\dot{\mathbf{j}}_m - \mu\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \nabla \times \mathbf{E}$$

или

$$-\sigma_m \mathbf{H} - \mu\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \nabla \times \mathbf{E}$$

Закон Фарадея для среды с потерями

Для одномерного случая:

$$\sigma_m H_y + \mu \mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial x}$$

Закон Фарадея для среды с потерями в дискретном виде

Запишем производные в дискретном виде
для точки $((m + 1/2)\Delta_x; q\Delta_t)$:

проблема

$$\sigma_m H_y^q[m+1/2] + \mu\mu_0 \frac{H_y^{q+1/2}[m+1/2] - H_y^{q-1/2}[m+1/2]}{\Delta_t} =$$

$$= \frac{E_z^q[m+1] - E_z^q[m]}{\Delta_x}$$

$$H_y^q[m+1/2] \approx \frac{H_y^{q+1/2}[m+1/2] + H_y^{q-1/2}[m+1/2]}{2}$$

Закон Фарадея для среды с потерями в дискретном виде

$$H_y^q[m+1/2] \approx \frac{H_y^{q+1/2}[m+1/2] + H_y^{q-1/2}[m+1/2]}{2}$$

$$\begin{aligned} & \sigma_m \frac{H_y^{q+1/2}[m+1/2] + H_y^{q-1/2}[m+1/2]}{2} + \\ & + \mu \mu_0 \frac{H_y^{q+1/2}[m+1/2] - H_y^{q-1/2}[m+1/2]}{\Delta_t} = \\ & = \frac{E_z^q[m+1] - E_z^q[m]}{\Delta_x} \end{aligned}$$

Расчет магнитной компоненты поля для среды с потерями

$$\begin{aligned}
 H_y^{q+1/2} [m+1/2] = & \frac{1 - \frac{\sigma_m \Delta_t}{2\mu\mu_0}}{1 + \frac{\sigma_m \Delta_t}{2\mu\mu_0}} H_y^{q-1/2} [m+1/2] + \\
 & + \frac{\frac{\Delta_t}{\mu\mu_0} \Delta_x}{1 + \frac{\sigma_m \Delta_t}{2\mu\mu_0}} \left(E_z^q [m+1] - E_z^q [m] \right)
 \end{aligned}$$

Расчет магнитной компоненты поля для среды с потерями

$$\begin{aligned}
 H_y^{q+1/2}[m+1/2] = & \frac{1 - \frac{\sigma_m \Delta_t}{2\mu\mu_0}}{1 + \frac{\sigma_m \Delta_t}{2\mu\mu_0}} H_y^{q-1/2}[m+1/2] + \\
 & + \frac{\frac{\Delta_t}{\mu\mu_0} \Delta_x}{1 + \frac{\sigma_m \Delta_t}{2\mu\mu_0}} \left(E_z^q[m+1] - E_z^q[m] \right)
 \end{aligned}$$

Расчет магнитной компоненты поля для среды с потерями

$$H_y^{q+1/2}[m+1/2] = \underline{C_{H_y H}} H_y^{q-1/2}[m+1/2] + \underline{C_{H_y E}} \left(E_z^q[m+1] - E_z^q[m] \right)$$

Расчет магнитной компоненты поля

Для случая $\sigma_m = 0$:

$$\begin{aligned} H_y^{q+1/2} [m+1/2] &= \\ &= H_y^{q-1/2} [m+1/2] + \frac{\Delta_t}{\mu \mu_0 \Delta_x} \left(E_z^q [m+1] - E_z^q [m] \right) \end{aligned}$$

Моделирование среды с потерями. Комментарии к реализации

Реализуем случай
 $\sigma_m = 0, Sc = 1$

$$loss = \frac{\sigma \Delta_t}{2 \varepsilon \varepsilon_0}$$

$$C_{E_z E} = \frac{1 - loss}{1 + loss}$$

$$C_{E_z H} = \frac{W_0 / \varepsilon}{1 + loss}$$

Геометрия решаемой задачи (fdtd_loss.py)

24

