

**Московский Авиационный Институт  
(национальный исследовательский университет)**

---

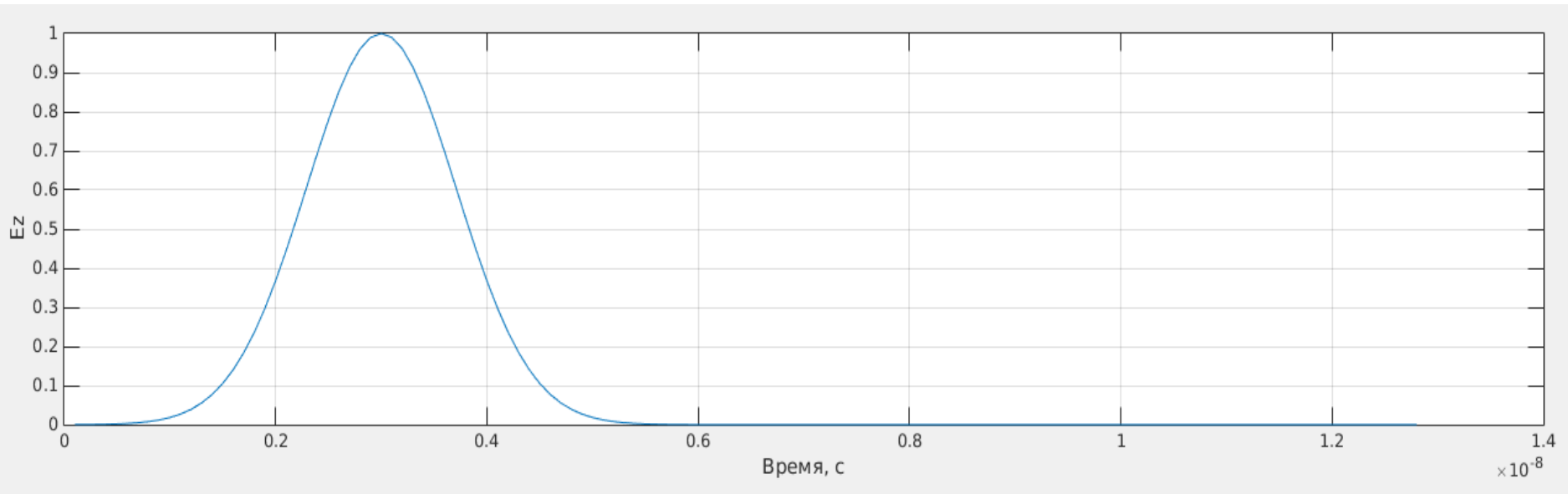
# **«Метод конечных разностей во временной области (FDTD)»**

# Источники возбуждения

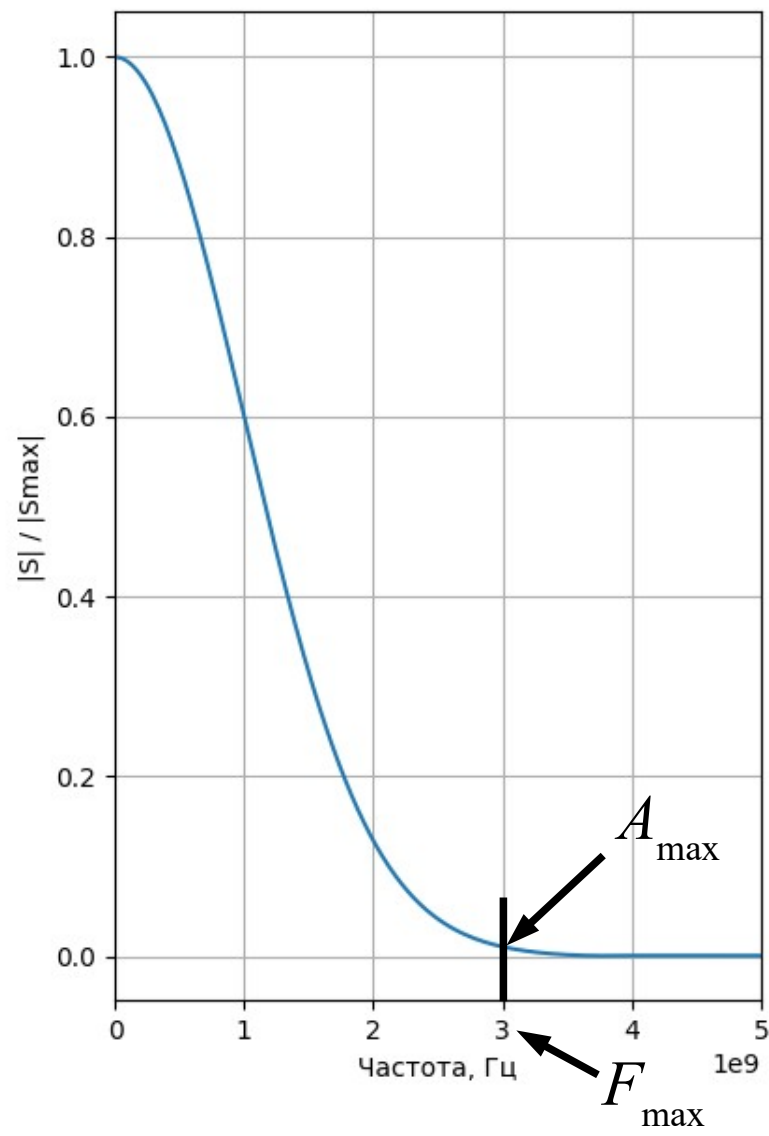
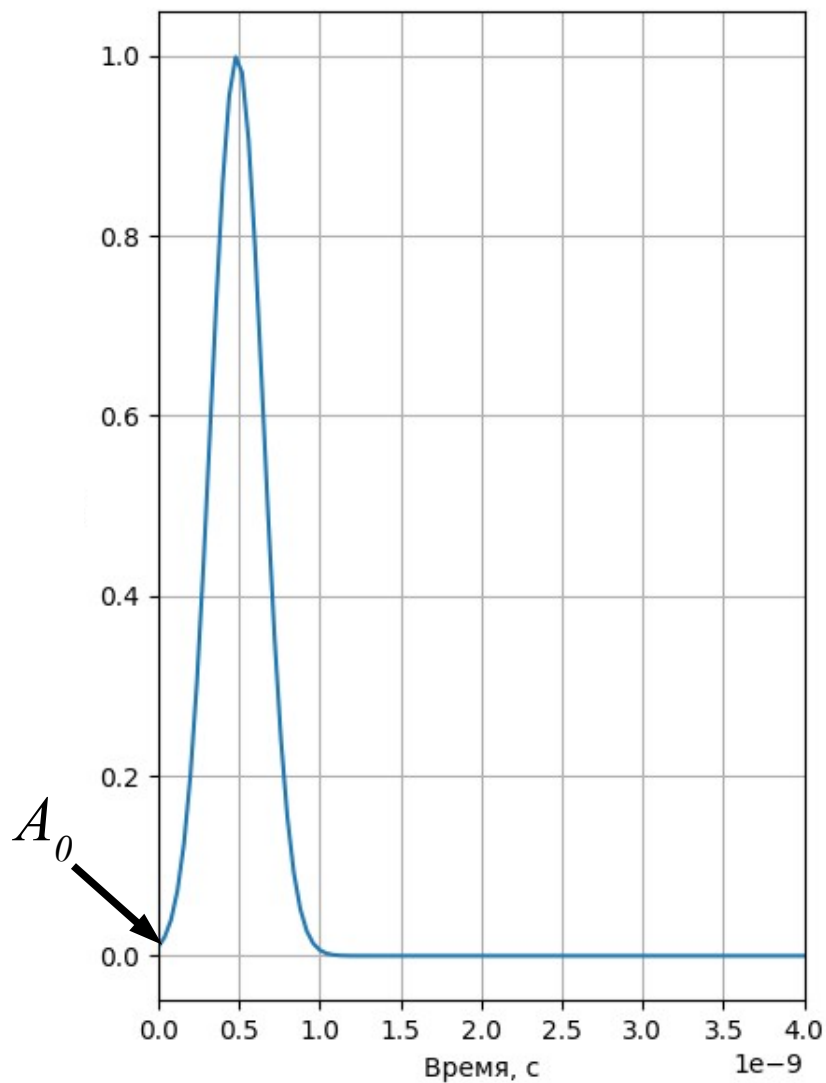
# Гауссов импульс

# Гауссов импульс

$$f_g(t) = A_m e^{-\left(\frac{t-d_g}{w_g}\right)^2}$$



# Спектр гауссова импульса



# Спектр гауссова импульса

Если заданы требования к сигналу:

- $A_0 > 1$  — уровень ослабления сигнала в момент времени  $t = 0$ .
- $F_{\max}$  — «максимальная» частота в спектре сигнала.
- $A_{\max} > 1$  — уровень ослабления спектра сигнала на частоте  $F_{\max}$ .

$$f_g(t) = A_m e^{-\left(\frac{t-d_g}{w_g}\right)^2}$$

$$w_g = \frac{\sqrt{\ln(A_{\max})}}{\pi F_{\max}}$$

$$d_g = w_g \sqrt{\ln(A_0)}$$

# Демонстрация спектра гауссова импульса

# Недостатки гауссова импульса

- В спектре присутствует постоянная составляющая.
- Максимальное значение спектра всегда на частоте 0 ГГц.
- Сигнал с постоянной составляющей нельзя излучить.



**Уравнение плоской волны для  
гауссова импульса в дискретном  
виде**

# Уравнение плоской волны для гауссова импульса в дискретном виде

$$E^q [m] = e^{-\left(\frac{(q - m \sqrt{\epsilon \mu} / S_c) - N_{dg}}{N_{wg}}\right)^2}$$

$$N_{wg} = w_g / \Delta_t$$

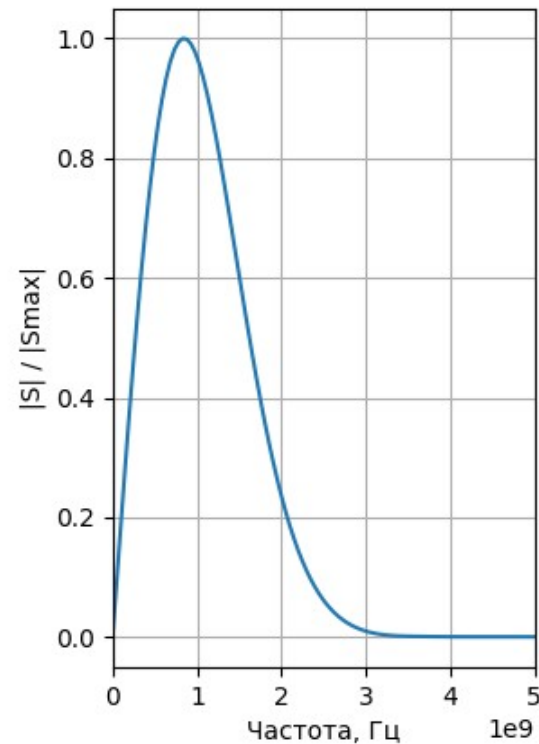
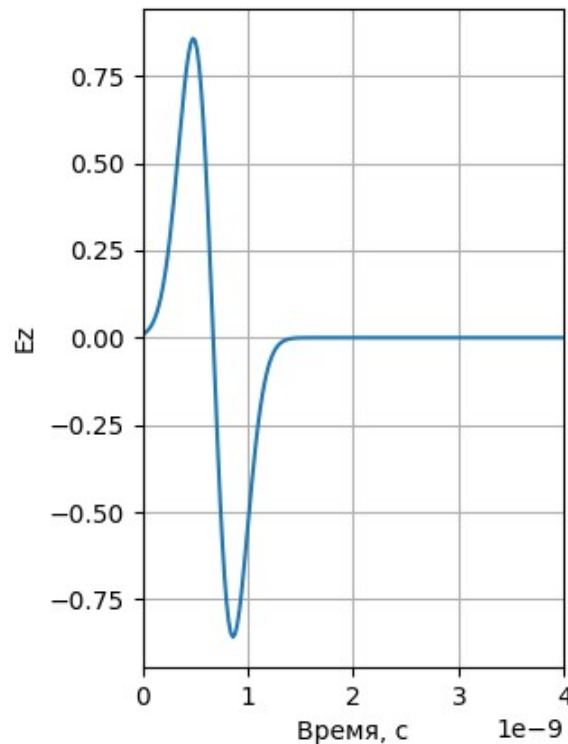
$$N_{dg} = d_g / \Delta_t$$

# Дифференцированный гауссов импульс

# Дифференцированный гауссов ИМПУЛЬС

12

$$f_g(t) = -2 A_m \left( \frac{t - d_g}{w_g} \right) e^{-\left( \frac{t - d_g}{w_g} \right)^2}$$



# Спектр дифференцированного гауссова импульса

Если заданы требования к сигналу:

- $F_{\max}$  — «максимальная» частота в спектре сигнала.
- $A_{\max} > 1$  — уровень ослабления спектра сигнала на частоте  $F_{\max}$  и ослабление в момент времени  $t = 0$ .

$$f_g(t) = -2 A_m \left( \frac{t - d_g}{w_g} \right) e^{-\left( \frac{t - d_g}{w_g} \right)^2}$$

$$w_g = \frac{\sqrt{\ln(5.5 A_{\max})}}{\pi F_{\max}}$$

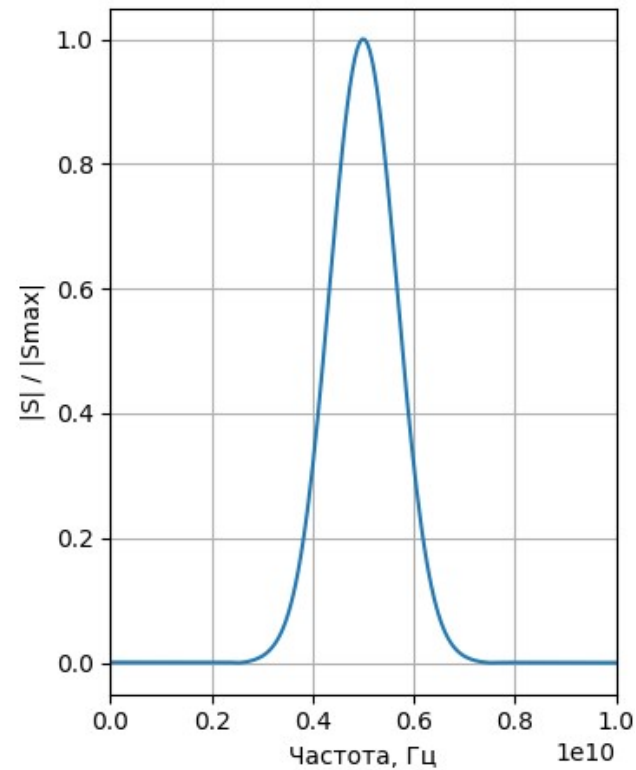
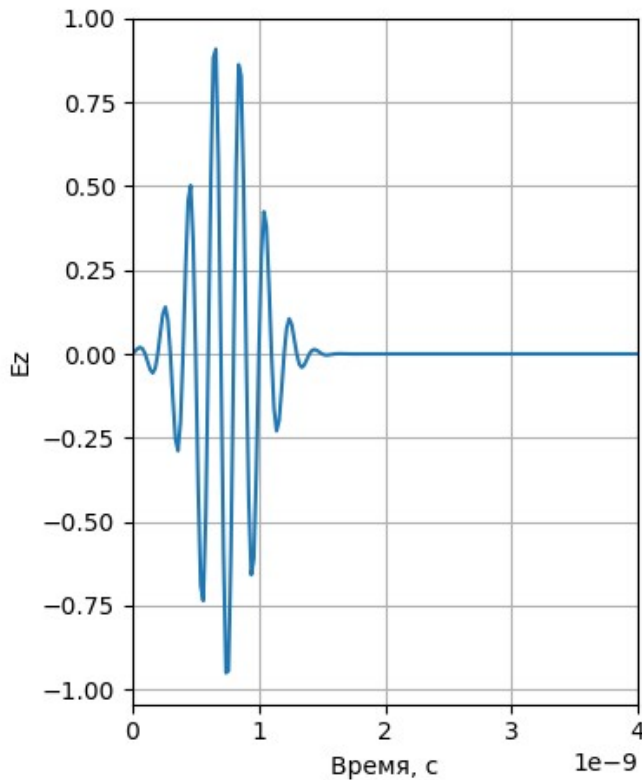
$$d_g = w_g \sqrt{\ln(2.5 A_{\max} \sqrt{\ln(2.5 A_{\max})})}$$

# Демонстрация спектра дифференцированного гауссова импульса

# Модулированный гауссов импульс

# Модулированный гауссов ИМПУЛЬС

$$f_g(t) = A_m \sin(2\pi f_0 t) e^{-\left(\frac{t-d_g}{w_g}\right)^2}$$





# Спектр модулированного гауссова импульса

Если заданы требования к сигналу:

- $f_0$  — центральная частота в спектре сигнала.
- $A_{\max} > 1$  — уровень ослабления спектра сигнала на частоте  $F_{\max}$ .
- $A_0$  — ослабление огибающей сигнала в момент времени  $t = 0$ .
- $\Delta F$  — ширина спектра по уровню ослабления  $A_{\max}$ .

$$f_g(t) = A_m \sin(2\pi f_0 t) e^{-\left(\frac{t-d_g}{w_g}\right)^2}$$

$$w_g = 2 \sqrt{\ln(A_{\max})} / (\pi \Delta F)$$

$$d_g = w_g \sqrt{\ln(A_0)}$$

# Демонстрация спектра модулированного гауссова импульса

**Уравнение плоской волны для  
модулированного гауссова  
импульса в дискретном виде**

# Уравнение плоской волны для модулированного гауссова импульса в дискретном виде

$f(\xi)$  — решение волнового уравнения, если:

- $f(\xi)$  дважды дифференцируема
- $\xi$  можно заменить на  $t \pm x / v$   
(для одномерного случая)

# Уравнение плоской волны для модулированного гауссова импульса в дискретном виде

В выражении для модулированного  
гауссова импульса  
заменяем  $t$  на  $t \pm x / v$

$$E(t) = \sin(2\pi f_0 t) e^{-\left(\frac{t-d_g}{w_g}\right)^2}$$



$$E(t, x) = \sin\left(2\pi f_0\left(t \pm \frac{x\sqrt{\epsilon\mu}}{c}\right)\right) e^{-\left(\frac{t \pm \frac{x\sqrt{\epsilon\mu}}{c} - d_g}{w_g}\right)^2}$$

# Уравнение плоской волны для модулированного гауссова импульса в дискретном виде

$$\lambda_0 = N_{\lambda_0} \Delta x, \quad w_g = N_{wg} \Delta t, \quad d_g = N_{dg} \Delta t,$$

$$\frac{x}{c} = \frac{m \Delta x}{c} = \frac{m \Delta t}{S_c},$$

$$f_0 = \frac{c}{\lambda_0} = \frac{c}{N_{\lambda_0} \Delta x} = \frac{S_c}{N_{\lambda_0} \Delta t}$$

# Уравнение плоской волны для модулированного гауссова импульса в дискретном виде

$$E^q [m] = \sin \left( \frac{2\pi S_c}{N_{\lambda_0} \Delta_t} \left( q \Delta_t \pm \frac{m \Delta_t \sqrt{\epsilon \mu}}{S_c} \right) \right) e^{-\left( \frac{q \Delta_t \pm \frac{m \Delta_t \sqrt{\epsilon \mu}}{S_c} - N_{dg} \Delta_t}{N_{wg} \Delta_t} \right)^2}$$



$$E^q [m] = \sin \left( \frac{2\pi}{N_{\lambda_0}} (q S_c \pm m \sqrt{\epsilon \mu}) \right) e^{-\left( \frac{q \pm \frac{m \sqrt{\epsilon \mu}}{S_c} - N_{dg}}{N_{wg}} \right)^2}$$

**Демонстрация модулированного  
гауссова импульса при  
использовании метода  
Total Field / Scattered Field**

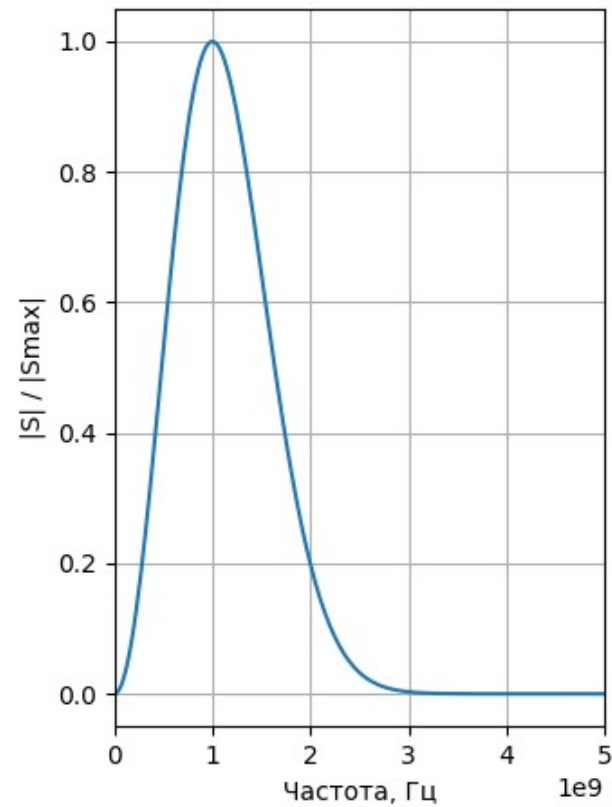
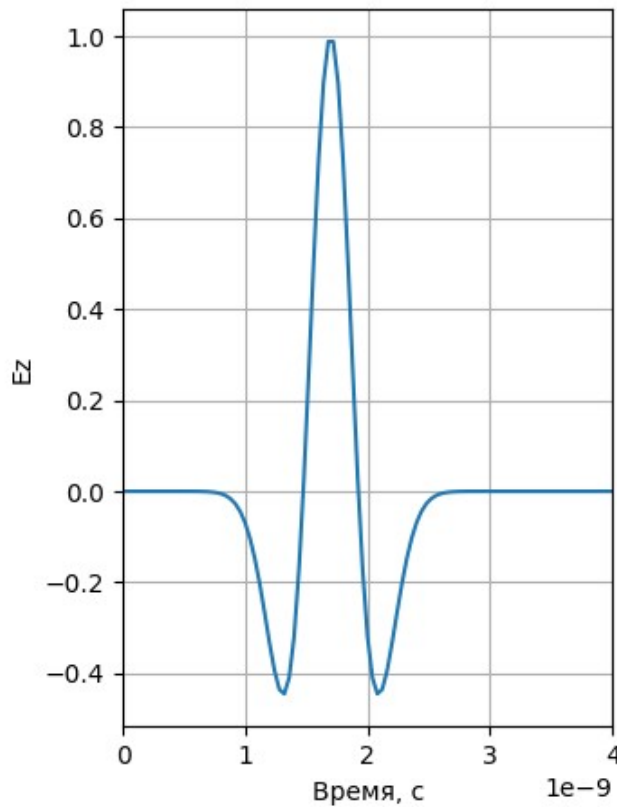
`fdtd_tfsf_medium_gauss_mod.py`



# Вейвлет Рикера

# Вейвлет Рикера

$$f_r(t) = \left(1 - 2\{\pi f_p[t - d_r]\}^2\right) e^{-\{\pi f_p[t - d_r]\}^2}$$



# Вейвлет Рикера

Если заданы требования к сигналу:

- $f_p$  — «пиковая» частота в спектре сигнала.

$$f_r(t) = \left(1 - 2\{\pi f_p [t - d_r]\}^2\right) e^{-\{\pi f_p [t - d_r]\}^2}$$

$$d_r = M_d \frac{1}{f_p}$$

$M_d$  — коэффициент задержки

# Демонстрация спектра вейвлета Рикера

# Вейвлет Рикера в терминах длин волн

$$\lambda_p = N_p \Delta_x, \quad f_p = \frac{c}{\lambda_p} = \frac{c}{N_p \Delta_x}$$

# Вейвлет Рикера в терминах длин волн

$$\lambda_p = N_p \Delta_x, \quad f_p = \frac{c}{\lambda_p} = \frac{c}{N_p \Delta_x}$$

$$S_c = \frac{c \Delta_t}{\Delta_x} \Rightarrow \Delta_x = \frac{c \Delta_t}{S_c}$$

$$f_p = \frac{S_c}{N_p \Delta_t}$$

# Вейвлет Рикера в терминах длин волн

$$f_p = \frac{S_c}{N_p \Delta_t}$$

Тогда задержка может быть представлена как:

$$d_r = M_d \frac{1}{f_p} = M_d \frac{N_p \Delta_t}{S_c}$$

# Вейвлет Рикера в дискретном виде

$$f_r[q] = \left( 1 - 2\pi^2 \left[ \frac{S_c q}{N_p} - M_d \right]^2 \right) \exp \left( -\pi^2 \left[ \frac{S_c q}{N_p} - M_d \right]^2 \right)$$



**Уравнение плоской волны для  
вейвлета Рикера в дискретном  
виде**

# Уравнение плоской волны для вейвлета Рикера в дискретном виде

В выражении для вейвлета Рикера заменим  $t$  на  $t \pm x / c$

$$E\left(t \pm \frac{x}{c}\right) = \left(1 - 2\pi^2 f_p^2 \left(t \pm \frac{x}{c} - d_r\right)^2\right) e^{-\pi^2 f_p^2 \left(t \pm \frac{x}{c} - d_r\right)^2}$$

# Уравнение плоской волны для вейвлета Рикера в дискретном виде

Запишем предыдущее выражение через число Куранта и длину волны, учитывая, что

$$\frac{x}{c} = \frac{m \Delta_x}{c} = \frac{m \Delta_t}{S_c}, \quad f_p = \frac{S_c}{N_p \Delta_t}, \quad d_r = M_d \frac{1}{f_p} = M_d \frac{N_p \Delta_t}{S_c}$$

$$E^q[m] = \left( 1 - 2\pi^2 \left[ \frac{S_c q \pm m}{N_p} - M_d \right]^2 \right) e^{-\pi^2 \left[ \frac{S_c q \pm m}{N_p} - M_d \right]^2}$$

**Демонстрация вейвлета Рикера  
при использовании метода  
Total Field / Scattered Field**

**Уравнение плоской волны для  
гармонического сигнала в  
дискретном виде**

# Гармонический сигнал

$$E(t) = A \cos(\omega t + \varphi_0)$$

или в дискретном виде

$$E(q \Delta_t) = A \cos(\omega q \Delta_t + \varphi_0)$$

# Гармонический сигнал в терминах<sup>40</sup> ДЛИН ВОЛН

Если задана длина волны в виде:  $\lambda = N_\lambda \cdot \Delta_x$ , то

$$f = \frac{c}{\lambda}, \quad \omega t = \frac{2\pi c}{\lambda} t$$

$$E(q \Delta_t) = A \cos \left( \frac{2\pi c}{N_\lambda \Delta_x} q \Delta_t + \varphi_0 \right)$$

$$E^q = A \cos \left( \frac{2\pi S_c}{N_\lambda} q + \varphi_0 \right)$$

# Уравнение плоской волны в дискретном виде

$$E(x, t) = A \cos(\omega t - kx + \varphi_0) = A \cos\left(\omega\left(t - \frac{k}{\omega}x\right) + \varphi_0\right)$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega \sqrt{\mu\varepsilon}}{c}$$

$$x = m \Delta_x$$



# Уравнение плоской волны в дискретном виде

тогда:

$$\omega \left( t - \frac{k}{\omega} x \right) = \frac{2\pi c}{N_\lambda \Delta_x} \left( q \Delta_t - \frac{\sqrt{\mu \varepsilon}}{c} m \Delta_x \right)$$

# Уравнение плоской волны в дискретном виде

тогда:

$$\omega \left( t - \frac{k}{\omega} x \right) = \frac{2\pi c}{N_\lambda \Delta_x} \left( q \Delta_t - \frac{\sqrt{\mu \varepsilon}}{c} m \Delta_x \right)$$

Вынесем за скобки  $\Delta_x / c$

$$\omega \left( t - \frac{k}{\omega} x \right) = \frac{2\pi}{N_\lambda} \left( q \frac{\Delta_t c}{\Delta_x} - \sqrt{\mu \varepsilon} m \right) = \frac{2\pi}{N_\lambda} \left( S_c q - \sqrt{\mu \varepsilon} m \right)$$

# Уравнение плоской волны в дискретном виде

В дискретном виде:

$$E^q [m] = A \cos \left( \frac{2\pi}{N_\lambda} (S_c q - \sqrt{\mu \varepsilon} m) + \varphi_0 \right)$$

Обычно используют:

$$E^q [m] = A \sin \left( \frac{2\pi}{N_\lambda} (S_c q - \sqrt{\mu \varepsilon} m) + \varphi_0 \right)$$

**Демонстрация гармонического  
сигнала при использовании  
метода  
Total Field / Scattered Field**

`fdtd_tfsf_sin.py`

`fdtd_tfsf_medium_sin.py`

# Демонстрация стоячей волны

`fddt_tfsf_sin.py`  
`fddt_swr.py`

# Программирование источников с использованием объектно-ориентированного подхода