Московский Авиационный Институт
(национальный исследовательский университет)

«Метод конечных разностей во временной области (FDTD)»

Двумерный метод конечных разностей во временной области

Уравнения Максвелла

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{j}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \mathbf{j}_\mathbf{m}$$

Закон Фарадея

$$-\sigma_m \mathbf{H} - \mu\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \nabla \times \mathbf{E} =$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{x_0} & \mathbf{y_0} & \mathbf{z_0} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & 0 \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = \mathbf{x_0} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \mathbf{y_0} \frac{\partial E_z}{\partial x} + \mathbf{z_0} \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right)$$

Закон Ампера

$$\sigma\mathbf{E}+\varepsilon\varepsilon_0\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}=\nabla\times\mathbf{H}=$$

$$=\begin{vmatrix}\mathbf{x_0} & \mathbf{y_0} & \mathbf{z_0}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & 0\\ H_x & H_y & H_z\end{vmatrix}=\mathbf{x_0}\frac{\partial H_z}{\partial y}-\mathbf{y_0}\frac{\partial H_z}{\partial x}+\mathbf{z_0}\left(\frac{\partial H_y}{\partial x}-\frac{\partial H_x}{\partial y}\right)$$

Законы Фарадея и Ампера в скалярном виде

$$-\sigma_m H_x - \mu\mu_0 \frac{\partial H_x}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial y}$$

$$\sigma_m H_y + \mu\mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial x}$$

$$-\sigma_m H_z - \mu\mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial t} = \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}$$

$$\sigma E_x + \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{\partial H_z}{\partial y}$$

$$\sigma E_y + \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} = -\frac{\partial H_z}{\partial x}$$

$$\sigma E_z + \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y}$$

Законы Фарадея и Ампера в скалярном виде

$$-\sigma_m H_x - \mu\mu_0 \frac{\partial H_x}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial y}$$

$$\sigma E_x + \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{\partial H_z}{\partial y}$$

$$\sigma_m H_y + \mu\mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial x}$$

$$\sigma E_y + \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} = -\frac{\partial H_z}{\partial x}$$

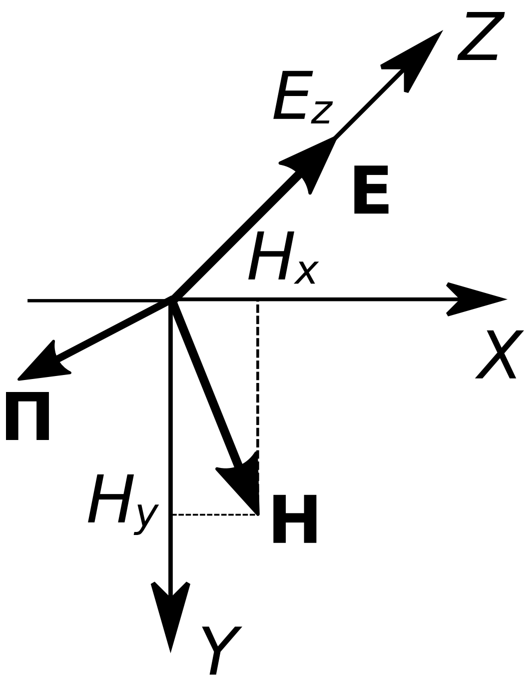
$$-\sigma_m H_z - \mu\mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial t} = \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}$$

$$\sigma E_z + \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y}$$

Виды поляризации для двумерного случая

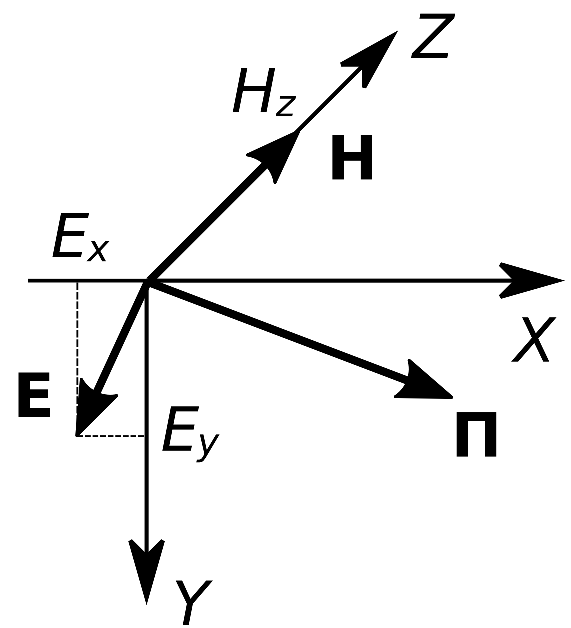
TM^z

Transverse Magnetic



TE^z

Transverse Electric



Виды мод электромагнитной волны

- TM - Transverse magnetic — Поперечно-магнитная волна. Нет магнитной составляющей в указанном направлении (E-волна).

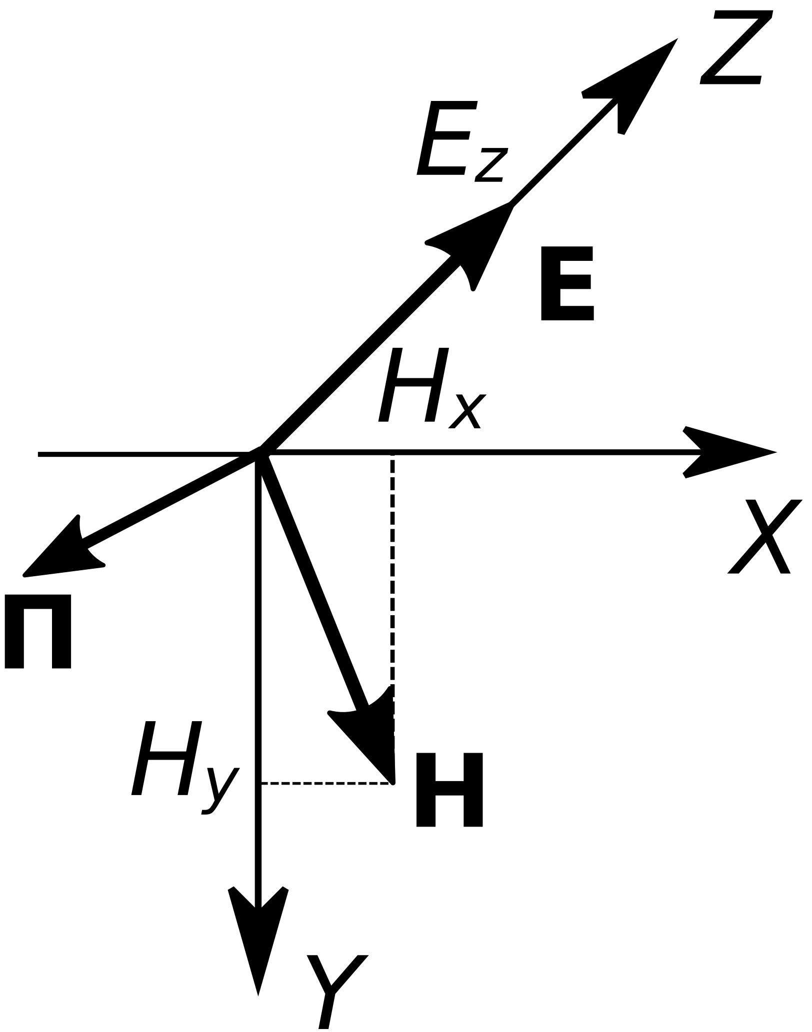
- TE - Transverse electric — Поперечно-электрическая волна. нет электрической составляющей в указанном направлении (H-волна).

- TEM - Transverse electromagnetic — Поперечно-электромагнитная волна. нет электрической и магнитной составляющих в указанном направлении.

- Гибридные — есть и электрическая, и магнитная составляющие в указанном направлении.

Двумерный метод конечных разностей во временной области для поляризации TM^z

Поляризация TM^z



Существуют следующие компоненты ЭМ поля:

- E_z
- H_x
- H_y

Метод FDTD для поляризации TM^z. Законы Фарадея и Ампера в скалярном виде

$$-\sigma_m H_x - \mu\mu_0 \frac{\partial H_x}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial y}$$

$$\sigma_m H_y + \mu\mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial x}$$

$$\sigma E_z + \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y}$$

Дискретизация величин E и H

$$H_x(x,y,t)=H_x(m\Delta_x,n\Delta_y,q\Delta_t)=H_x^q[m,n]$$

$$H_y(x,y,t)=H_y(m\Delta_x,n\Delta_y,q\Delta_t)=H_y^q[m,n]$$

$$E_z(x,y,t)=E_z(m\Delta_x,n\Delta_y,q\Delta_t)=E_z^q[m,n]$$

m — индекс по пространству вдоль оси X.

n — индекс по пространству вдоль оси Y.

q — индекс по времени.

Δ_x, Δ_y — размер сетки по осям X и Y соответственно.

Конечно-разностная аппроксимация для закона Фарадея

Запишем конечно-разностную аппроксимацию для точки $(m\Delta_x, (n + 1/2)\Delta_y, q\Delta_t)$

$$-\sigma_m \frac{H_x^{q+1/2}[m,n+1/2]+H_x^{q-1/2}[m,n+1/2]}{2}-$$

$$-\mu\mu_0 \frac{H_x^{q+1/2}[m,n+1/2]+H_x^{q-1/2}[m,n+1/2]}{\Delta_t}=$$

$$=\frac{E_z^q[m,n+1]-E_z^q[m,n]}{\Delta_y}$$

Конечно-разностная аппроксимация для закона Фарадея

Из полученного уравнения выражаем $H_x^{q+1/2}[m, n+1/2]$:

$$H_x^{q+1/2}[m,n+1/2]=\frac{1-\dfrac{\sigma_m\Delta_t}{2\mu\mu_0}}{1+\dfrac{\sigma_m\Delta_t}{2\mu\mu_0}}H_x^{q-1/2}[m,n+1/2]-$$

$$-\frac{1}{1+\dfrac{\sigma_m\Delta_t}{2\mu\mu_0}}\frac{\Delta_t}{\mu\mu_0\Delta_y}\left(E_z^q[m,n+1]-E_z^q[m,n]\right)$$

Конечно-разностная аппроксимация для закона Фарадея

Подобным образом выражаем $H_y^{q+1/2}[m+1/2, n]$:

$$H_y^{q+1/2}[m+1/2,n]=\frac{1-\dfrac{\sigma_m\Delta_t}{2\mu\mu_0}}{1+\dfrac{\sigma_m\Delta_t}{2\mu\mu_0}}H_y^{q-1/2}[m+1/2,n]+$$

$$+\frac{1}{1+\dfrac{\sigma_m\Delta_t}{2\mu\mu_0}}\frac{\Delta_t}{\mu\mu_0\Delta_x}\left(E_z^q[m+1,n]-E_z^q[m,n]\right)$$

Конечно-разностная аппроксимация для закона Ампера

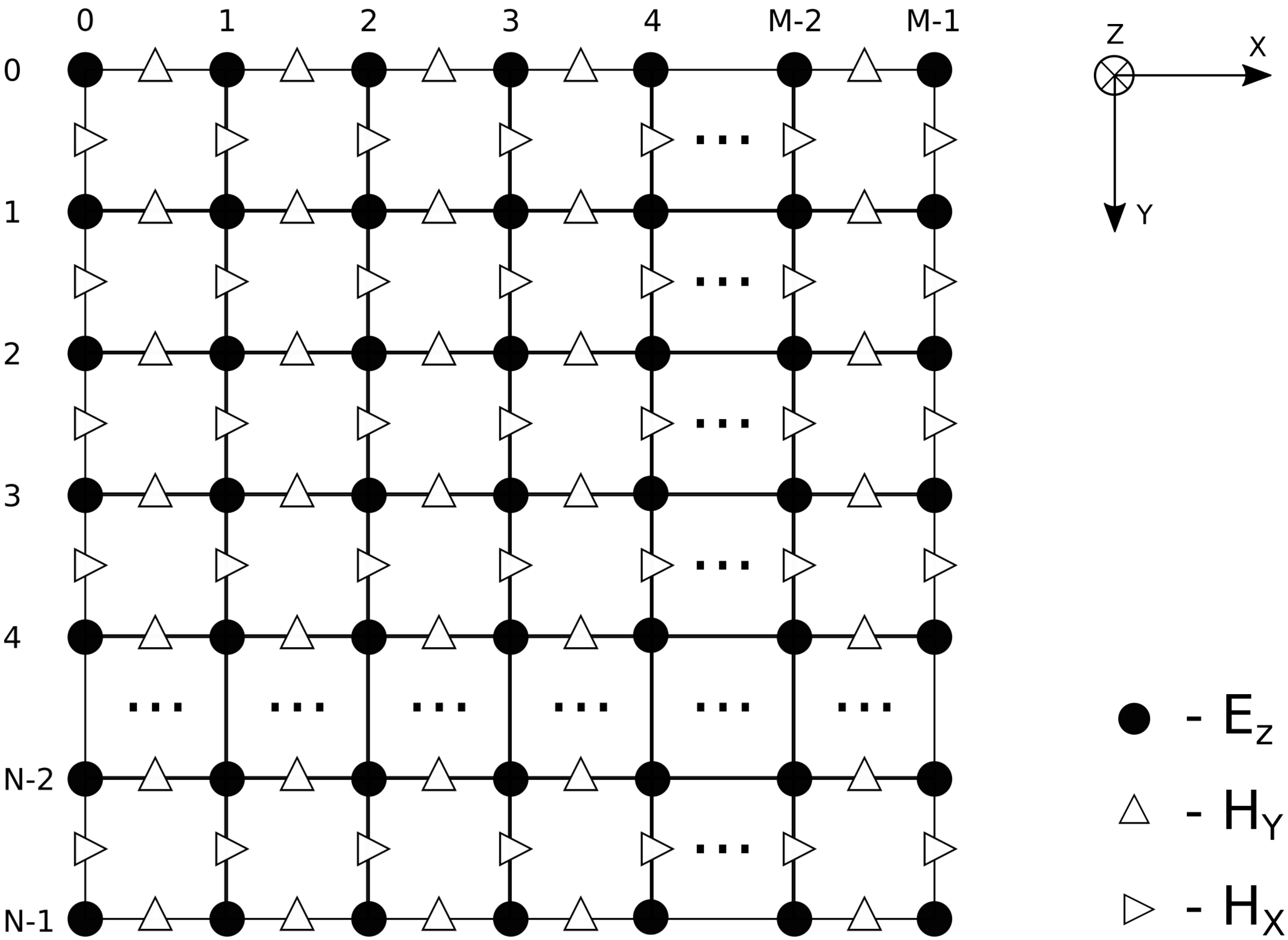
Подобным образом выражаем $E_z^{q+1}[m, n]$ из закона Ампера:

$$E_z^{q+1}[m,n]=\frac{1-\frac{\sigma\Delta_t}{2\varepsilon\varepsilon_0}}{1+\frac{\sigma\Delta_t}{2\varepsilon\varepsilon_0}}E_z^q[m,n]+$$

$$+\frac{1}{1+\frac{\sigma\Delta_t}{2\varepsilon\varepsilon_0}}\left(\frac{\Delta_t}{\varepsilon\varepsilon_0\Delta_x}\left\{H_y^{q+1/2}[m+1/2,n]-H_y^{q+1/2}[m-1/2,n]\right\}-\right.$$

$$\left.-\frac{\Delta_t}{\varepsilon\varepsilon_0\Delta_y}\left\{H_x^{q+1/2}[m,n+1/2]-H_x^{q+1/2}[m,n-1/2]\right\}\right)$$

Пространственная сетка для двумерного метода FDTD. Поляризация TM^z



Особенности реализации двумерного метода FDTD

- Размер массива для компоненты E_z — $M \times N$
- Размер массива для компоненты H_x — $M \times (N - 1)$
- Размер массива для компоненты H_y — $(M - 1) \times N$

Конечно-разностная аппроксимация

Если $\Delta_x = \Delta_y = \delta$, то можно ввести следующие коэффициенты:

$$C_{hxh}(m, n+1/2) = \left. \frac{1 - \dfrac{\sigma_m \Delta_t}{2\mu\mu_0}}{1 + \dfrac{\sigma_m \Delta_t}{2\mu\mu_0}} \right|_{m\delta, (n+1/2)\delta}$$

$$C_{hxe}(m, n+1/2) = \left. \frac{1}{1 + \dfrac{\sigma_m \Delta_t}{2\mu\mu_0}} \frac{\Delta_t}{\mu\mu_0\delta} \right|_{m\delta, (n+1/2)\delta}$$

Конечно-разностная аппроксимация

Если $\Delta_x = \Delta_y = \delta$, то можно ввести следующие коэффициенты:

$$C_{hyh}(m+1/2,n)=\left.\frac{1-\dfrac{\sigma_m\Delta_t}{2\mu\mu_0}}{1+\dfrac{\sigma_m\Delta_t}{2\mu\mu_0}}\right|_{(m+1/2)\delta,n\delta}$$

$$C_{hye}(m+1/2,n)=\left.\frac{1}{1+\dfrac{\sigma_m\Delta_t}{2\mu\mu_0}}\frac{\Delta_t}{\mu\mu_0\delta}\right|_{(m+1/2)\delta,n\delta}$$

Конечно-разностная аппроксимация

Если $\Delta_x = \Delta_y = \delta$, то можно ввести следующие коэффициенты:

$$C_{eze}(m,n) = \left. \frac{1 - \dfrac{\sigma \Delta_t}{2\varepsilon\varepsilon_0}}{1 + \dfrac{\sigma \Delta_t}{2\varepsilon\varepsilon_0}} \right|_{m\delta, n\delta}$$

$$C_{ezh}(m,n) = \left. \frac{1}{1 + \dfrac{\sigma \Delta_t}{2\varepsilon\varepsilon_0}} \frac{\Delta_t}{\varepsilon\varepsilon_0\delta} \right|_{m\delta, n\delta}$$

Программная реализация конечно-разностной схемы

```
Hx[m, n] = Chxh[m, n] * Hx[m, n] –
            Chxe[m, n] * (Ez[m, n + 1] – Ez[m, n])

Hy[m, n] = Chyh[m, n] * Hy[m, n] +
            Chye[m, n] * (Ez[m + 1, n] – Ez[m, n])

Ez[m, n] = Ceze[m, n] * Ez[m, n] +
            Cezh[m, n] * (Hy[m, n] – Hy[m – 1, n])–
            (Hx[m, n] – Hx[m, n – 1])
```

Стабильность двумерного метода FDTD

Критерий устойчивости Куранта-Фридриха-Леви

$$v_{max}\Delta_t \leqslant \frac{1}{\sqrt{\Delta_x^{-2}+\Delta_y^{-2}+\Delta_z^{-2}}}$$

$$v_{max} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_{min}\mu_{min}}}$$

$$\text{Если } \Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = \Delta$$

$$v_{max}\Delta_t \leqslant \frac{\Delta}{\sqrt{N}}$$

N — размерность пространства (1, 2, 3)

Стабильность двумерного метода FDTD

Критерий стабильности для N-мерного пространства:

$$S_c = v\Delta_t \sqrt{\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{\Delta_n^2}} \leq 1$$

Критерий стабильности для двумерного пространства:

$$S_c = v\Delta_t \sqrt{\frac{1}{\Delta_x^2} + \frac{1}{\Delta_y^2}} \leq 1$$

Стабильность двумерного метода FDTD

Если $\Delta_x = \Delta_y = \mathbf{\Delta}$, то

$$S_c = v\,\Delta_t \sqrt{\frac{1}{\Delta^2} + \frac{1}{\Delta^2}} \leq 1 \quad \rightarrow \quad S_c = \frac{v\,\Delta_t \sqrt{2}}{\Delta} \leq 1$$

Критерий стабильности для N-мерного пространства:

$$S_c = \frac{v\,\Delta_t \sqrt{N}}{\Delta} \leq 1$$

или

$$S_c = \frac{v\,\Delta_t}{\Delta} \leq \frac{1}{\sqrt{N}}$$

Стабильность двумерного метода FDTD

Введем коэффициент — аналог одномерного числа Куранта для двумерного случая

$$\boxed{Cdtds = \frac{v\,\Delta_t}{\Delta} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}}$$

Критерий устойчивости для двумерного FDTD:

$$\boxed{\Delta_t \leq \frac{\Delta}{c\sqrt{2}}}$$

Демонстрация двумерного метода FDTD для поляризации TM^z. Источник цилиндрической волны.

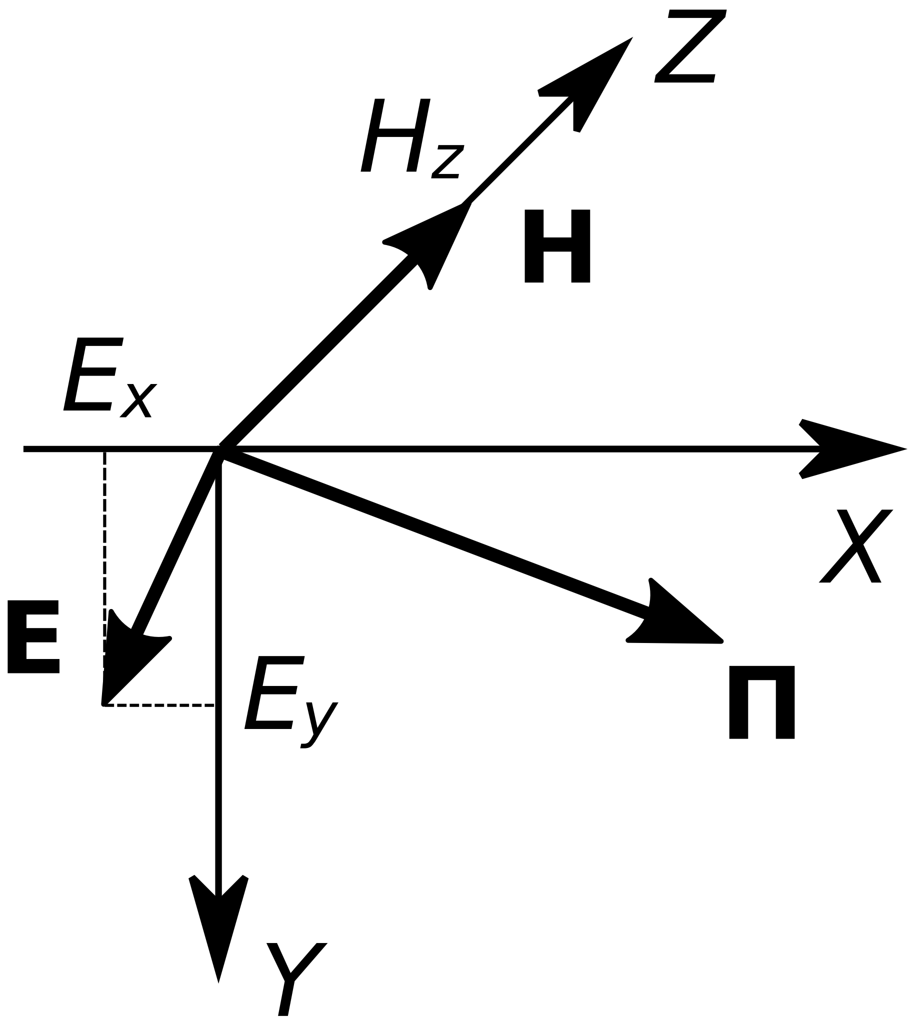
fdtd_2d_TM_first.py

Демонстрация двумерного метода FDTD для поляризации TM^z. Источник плоской волны.

fdtd_2d_TM_plainwave.py

Двумерный метод конечных разностей во временной области для поляризации TE^z

Поляризация TE^z



Существуют следующие компоненты ЭМ поля:

- E_x
- E_y
- H_z

Законы Фарадея и Ампера в скалярном виде

$$\sigma E_x + \varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{\partial H_z}{\partial y}$$

$$\sigma E_y + \varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} = -\frac{\partial H_z}{\partial x}$$

$$-\sigma_m H_z - \mu \mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial t} = \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}$$

Дискретизация величин E и H

$$E_x(x,y,t)=E_x(m\Delta_x,n\Delta_y,q\Delta_t)=E_x^q[m,n]$$

$$E_y(x,y,t)=E_y(m\Delta_x,n\Delta_y,q\Delta_t)=E_y^q[m,n]$$

$$H_z(x,y,t)=H_z(m\Delta_x,n\Delta_y,q\Delta_t)=H_z^q[m,n]$$

m — индекс по пространству вдоль оси X.
n — индекс по пространству вдоль оси Y.
q — индекс по времени.

Δ_x, Δ_y — размер сетки по осям X и Y соответственно.

Конечно-разностная схема

$$H_z^{q+1/2}[m+1/2,n+1/2]=\frac{1-\dfrac{\sigma_m\Delta_t}{2\mu\mu_0}}{1+\dfrac{\sigma_m\Delta_t}{2\mu\mu_0}}H_z^{q-1/2}[m+1/2,n+1/2]-$$

$$-\frac{1}{1+\dfrac{\sigma_m\Delta_t}{2\mu\mu_0}}\left(\frac{\Delta_t}{\mu\mu_0\Delta_x}\left\{E_y^q[m+1,n+1/2]-E_y^q[m,n+1/2]\right\}-\right.$$

$$\left.-\frac{\Delta_t}{\mu\mu_0\Delta_y}\left\{E_x^q[m+1/2,n+1]-E_x^q[m+1/2,n]\right\}\right)$$

Конечно-разностная схема

$$E_x^{q+1}[m+1/2,n]=\frac{1-\dfrac{\sigma\Delta_t}{2\varepsilon\varepsilon_0}}{1+\dfrac{\sigma\Delta_t}{2\varepsilon\varepsilon_0}}E_x^q[m+1/2,n]+$$

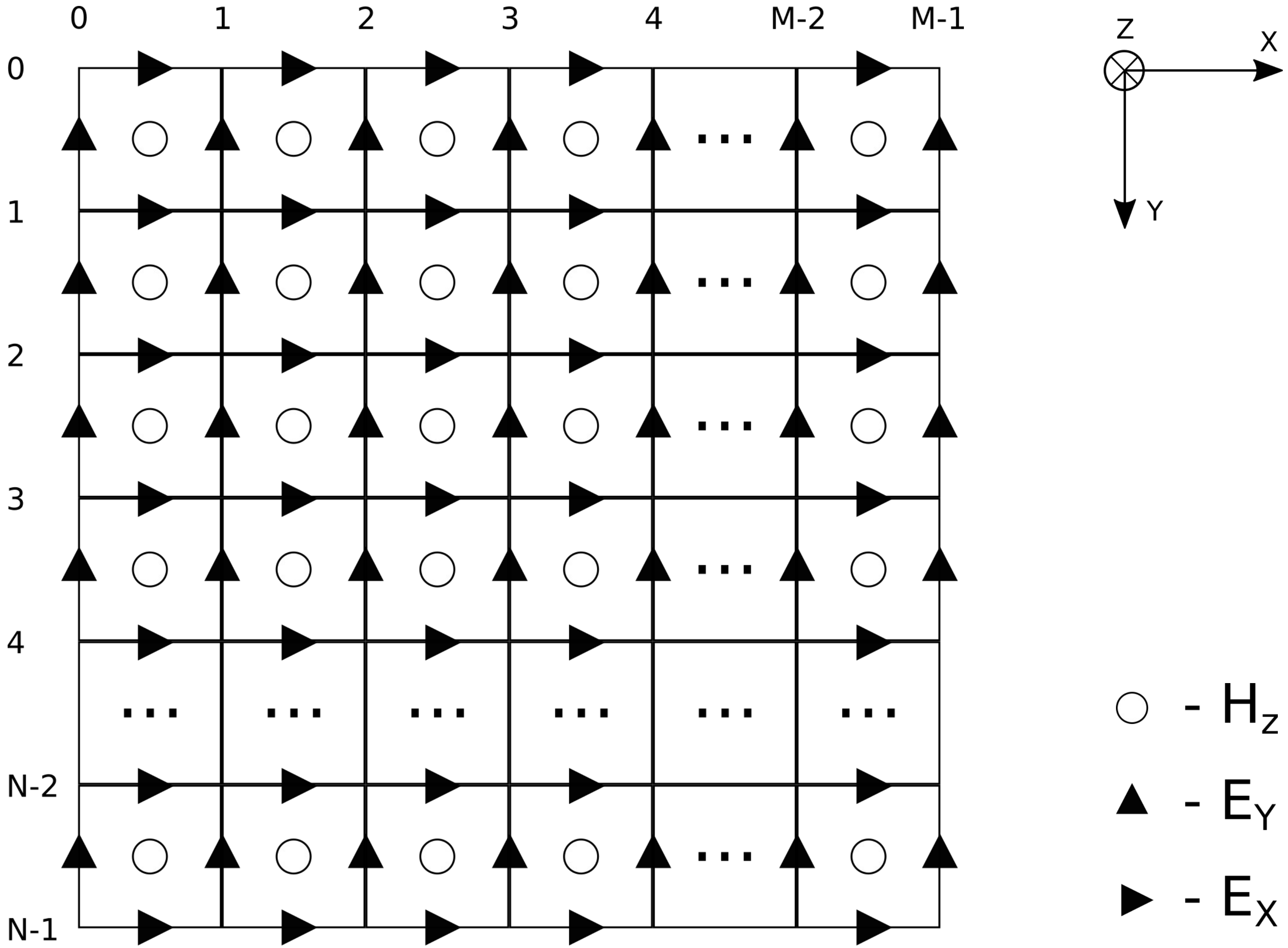
$$+\frac{1}{1+\dfrac{\sigma\Delta_t}{2\varepsilon\varepsilon_0}}\frac{\Delta_t}{\varepsilon\varepsilon_0\Delta_y}\left(H_z^{q+1/2}[m+1/2,n+1/2]-H_z^{q+1/2}[m+1/2,n-1/2]\right)$$

Конечно-разностная схема

$$E_y^{q+1}[m,n+1/2]=\frac{1-\dfrac{\sigma\Delta_t}{2\varepsilon\varepsilon_0}}{1+\dfrac{\sigma\Delta_t}{2\varepsilon\varepsilon_0}}E_y^q[m,n+1/2]-$$

$$-\frac{1}{1+\dfrac{\sigma\Delta_t}{2\varepsilon\varepsilon_0}}\frac{\Delta_t}{\varepsilon\varepsilon_0\Delta_x}\left(H_z^{q+1/2}[m+1/2,n+1/2]-H_z^{q+1/2}[m-1/2,n+1/2]\right)$$

Пространственная сетка для двумерного метода FDTD. Поляризация TE^z



Конечно-разностная аппроксимация

Если $\Delta_x = \Delta_y = \delta$, то можно ввести следующие коэффициенты:

$$C_{hzh}(m+1/2, n+1/2) = \left. \frac{1 - \dfrac{\sigma_m \Delta_t}{2\mu\mu_0}}{1 + \dfrac{\sigma_m \Delta_t}{2\mu\mu_0}} \right|_{(m+1/2)\delta, (n+1/2)\delta}$$

$$C_{hze}(m+1/2, n+1/2) = \left. \frac{1}{1 + \dfrac{\sigma_m \Delta_t}{2\mu\mu_0}} \frac{\Delta_t}{\mu\mu_0\delta} \right|_{(m+1/2)\delta, (n+1/2)\delta}$$

Конечно-разностная аппроксимация

Если $\Delta_x = \Delta_y = \delta$, то можно ввести следующие коэффициенты:

$$C_{exe}(m+1/2,n) = \left. \frac{1 - \dfrac{\sigma \Delta_t}{2 \varepsilon \varepsilon_0}}{1 + \dfrac{\sigma \Delta_t}{2 \varepsilon \varepsilon_0}} \right|_{(m+1/2)\delta,\, n\delta}$$

$$C_{exh}(m+1/2,n) = \left. \frac{1}{1 + \dfrac{\sigma \Delta_t}{2 \varepsilon \varepsilon_0}} \frac{\Delta_t}{\varepsilon \varepsilon_0 \delta} \right|_{(m+1/2)\delta,\, n\delta}$$

Конечно-разностная аппроксимация

Если $\Delta_x = \Delta_y = \delta$, то можно ввести следующие коэффициенты:

$$C_{eye}(m, n+1/2) = \left. \frac{1 - \dfrac{\sigma \Delta_t}{2 \varepsilon \varepsilon_0}}{1 + \dfrac{\sigma \Delta_t}{2 \varepsilon \varepsilon_0}} \right|_{m\delta, (n+1/2)\delta}$$

$$C_{eyh}(m, n+1/2) = \left. \frac{1}{1 + \dfrac{\sigma \Delta_t}{2 \varepsilon \varepsilon_0}} \frac{\Delta_t}{\varepsilon \varepsilon_0 \delta} \right|_{m\delta, (n+1/2)\delta}$$

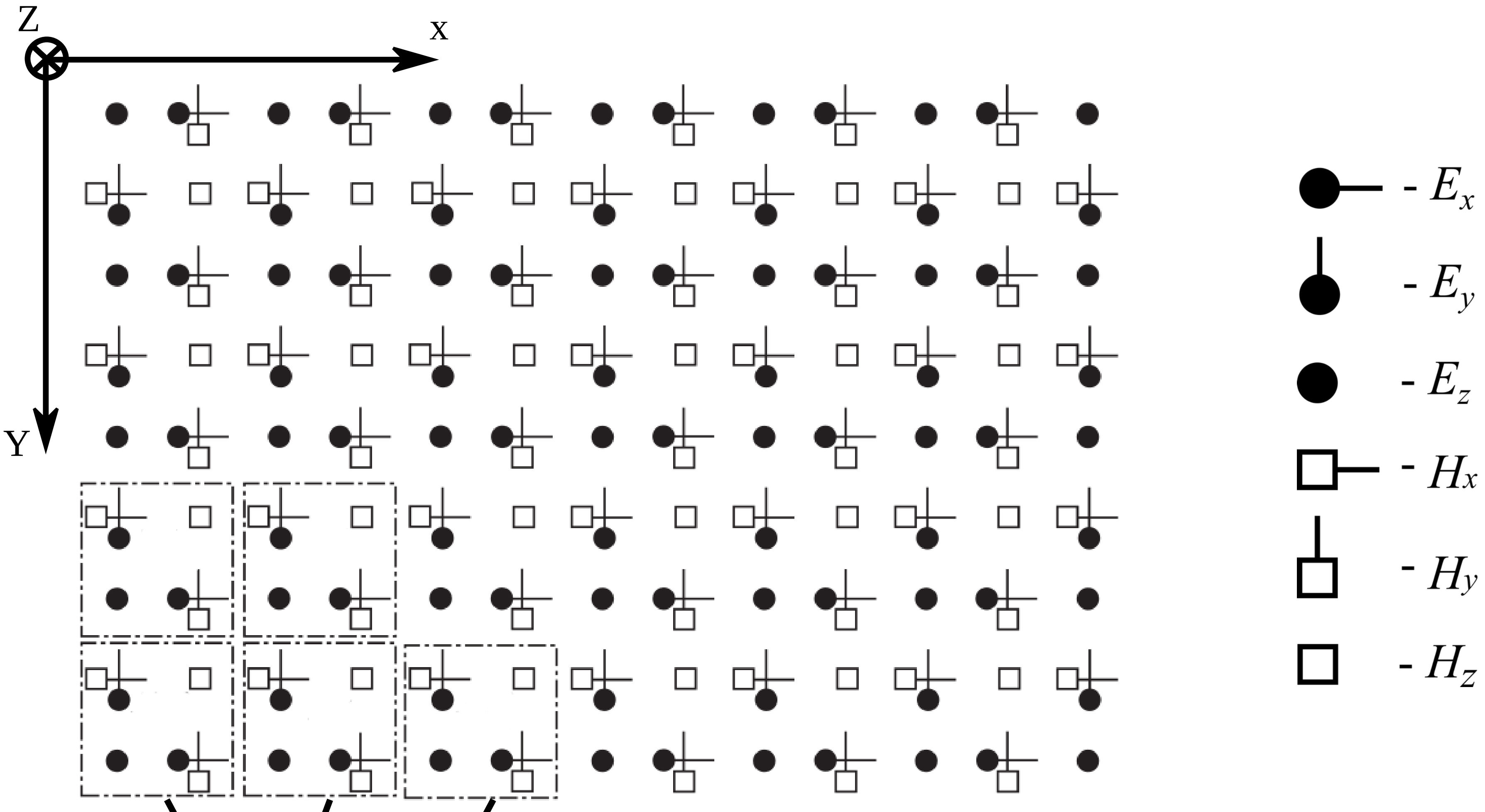
Программная реализация конечно-разностной схемы

```
Hz[m, n] = Chzh[m, n] * Hz[m, n] +
               Chze[m, n] * ((Ex[m, n + 1] - Ex[m, n] -
                             (Ey[m + 1, n] - Ey[m, n]))

Ex[m, n] = Cexe[m, n] * Ex[m, n] +
               Cexh[m, n] * (Hz[m, n] - Hz[m, n - 1])

Ey[m, n] = Ceye[m, n] * Ey[m, n] -
               Ceyh[m, n] * (Hz[m, n] - Hz[m - 1, n])
```

Демонстрация двумерного метода FDTD для поляризации TE^z. Источник цилиндрической волны.

fdtd_2d_TE_first.py

Объединенная пространственная сетка для двумерного метода FDTD для двух поляризаций



Одинаковые индексы