Московский авиационный институт

Учебно-исследовательская работа студентов

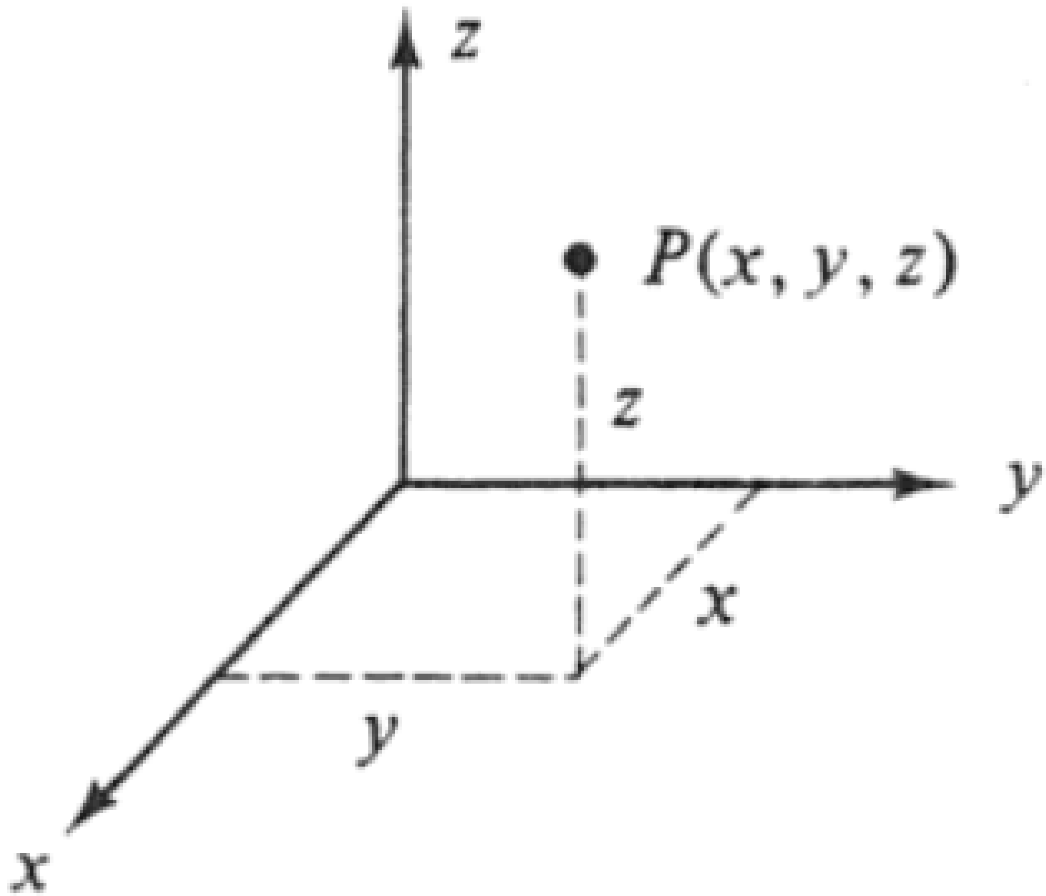
Системы координат

Системы координат

Системы координат

- Декартова система координат.
- Сферические системы координат.
- Цилиндрическая система координат.
- Система координат в направляющих косинусах.
- Другие системы координат.

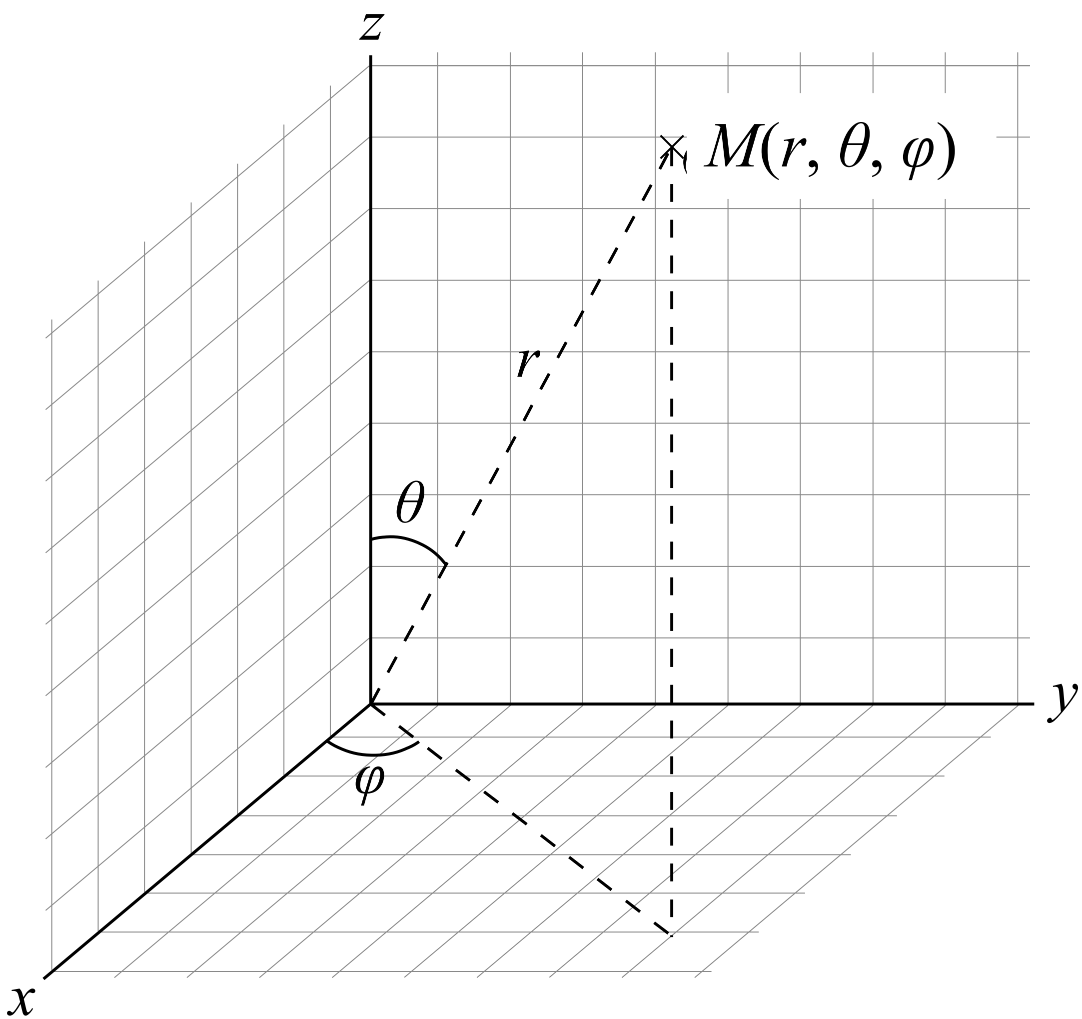
Декартова система координат (Cartesian coordinate system)



Рене Декарт
(фр. René Descartes,
лат. Renatus Cartesius)
1596 — 1650 гг.

Сферическая система координат

Сферическая система координат



Дано: $M(x, y, z)$

$$r = ???$$

$$\theta = ???$$

$$\varphi = ???$$

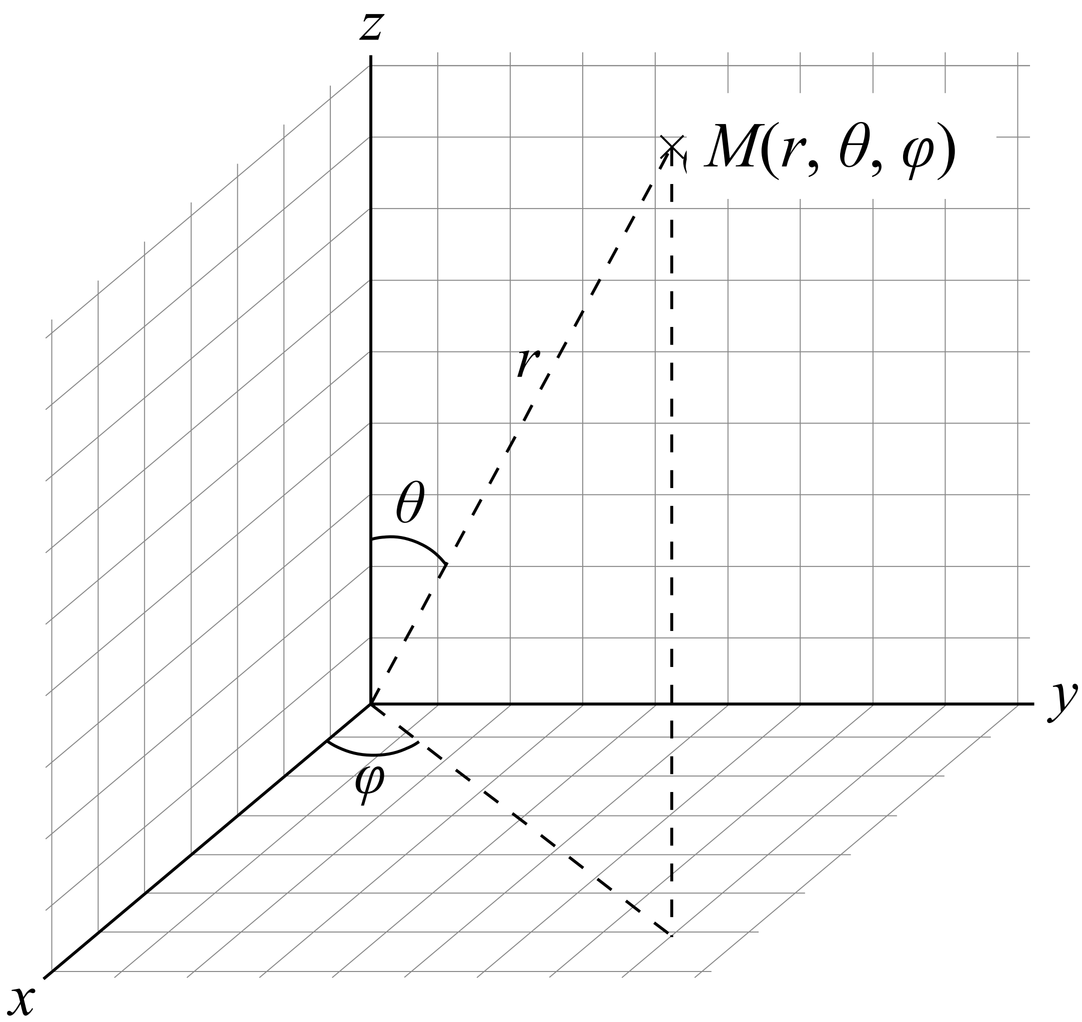
Связь между сферической и декартовой системами координат

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\theta = \arccos\left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right) = \mathrm{arctg}\left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}\right)$$

$$\varphi = \mathrm{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)$$

Сферическая система координат



Дано: $M(r, \theta, \varphi)$

$x = ???$

$y = ???$

$z = ???$

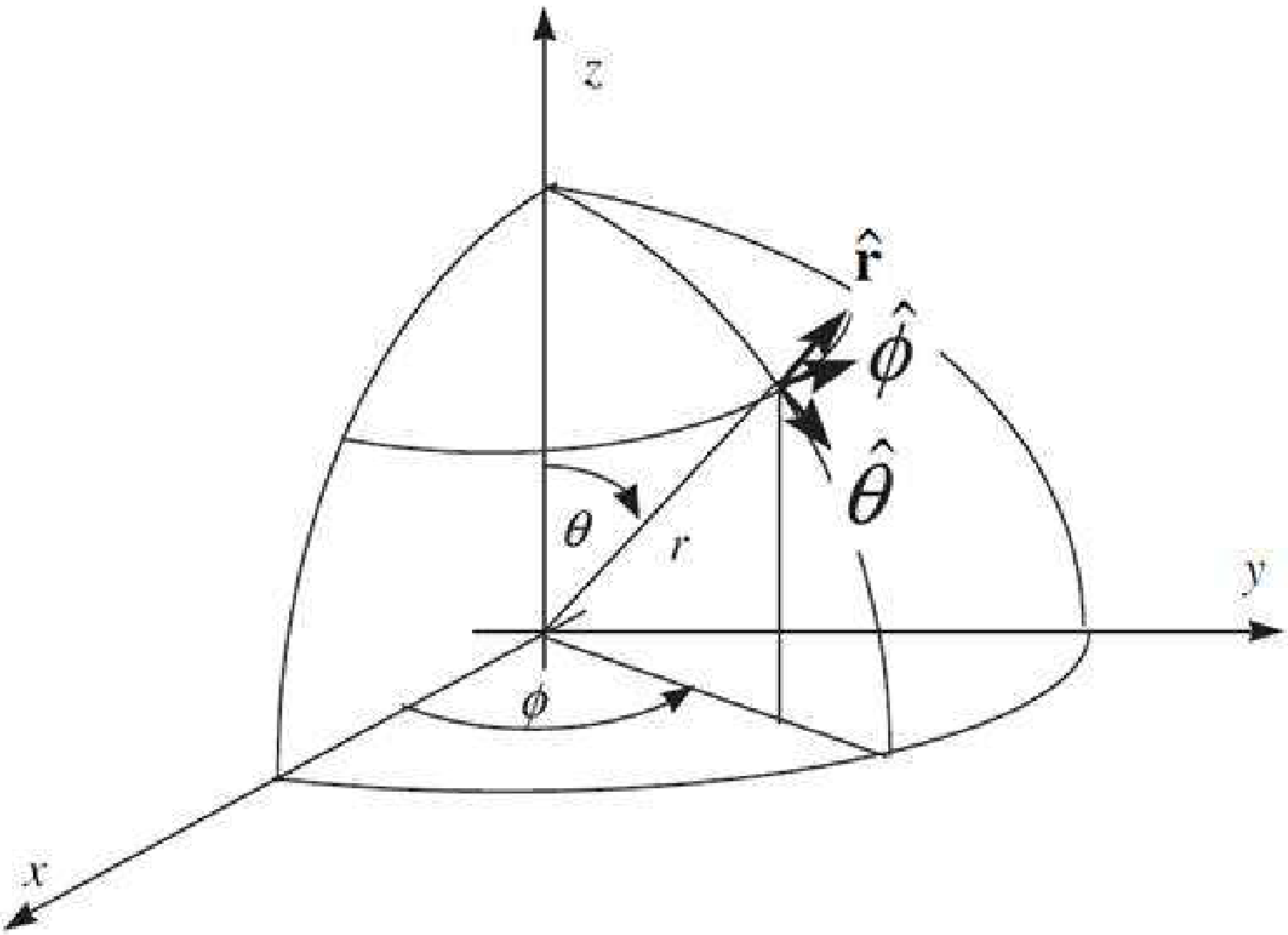
Связь между сферической и декартовой системами координат

$$x = r \cdot \sin\theta \cdot \cos\varphi$$

$$y = r \cdot \sin\theta \cdot \sin\varphi$$

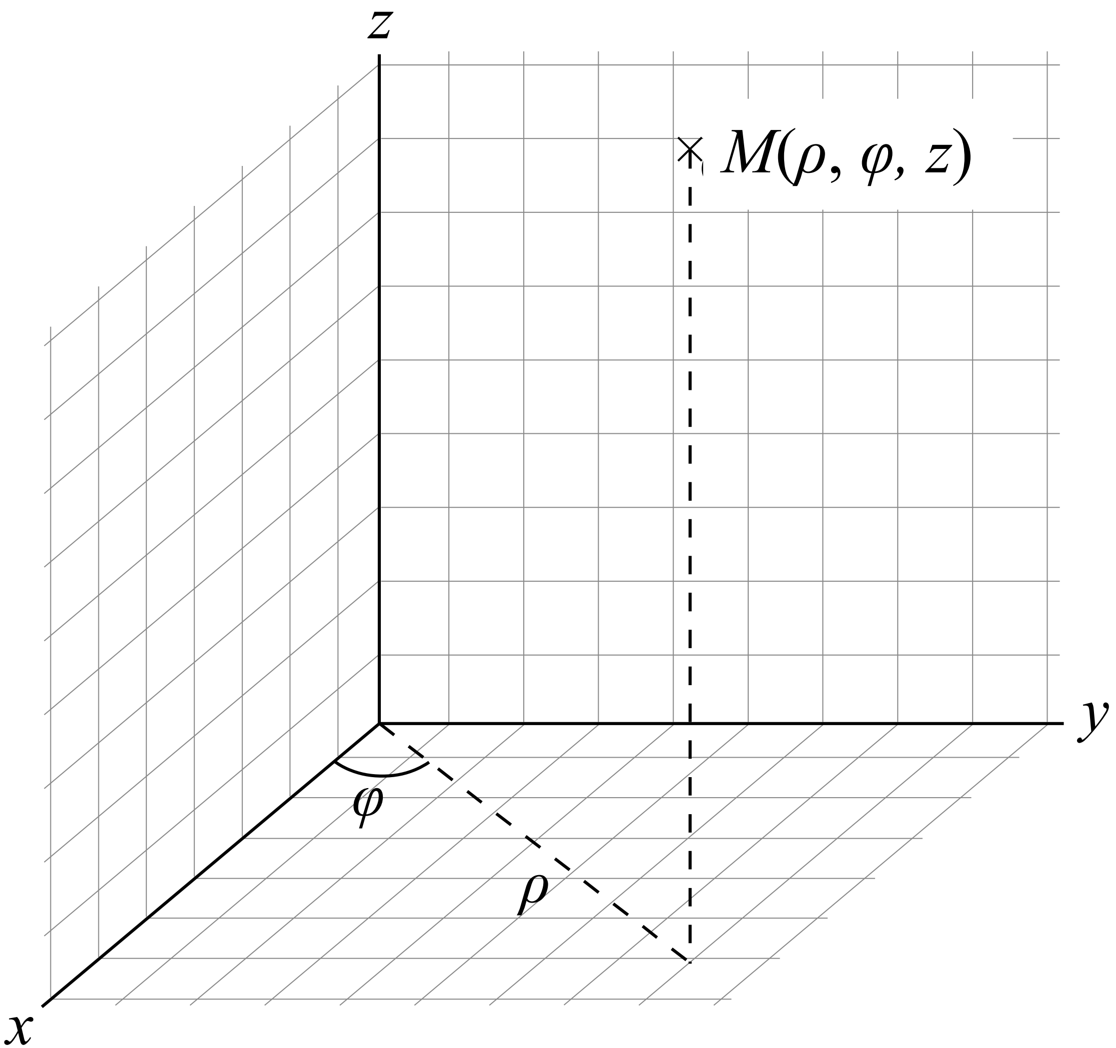
$$z = r \cdot \cos\theta$$

Сферическая система координат



Цилиндрическая система координат

Цилиндрическая система координат



Дано: $M(x, y, z)$

$$\rho = ???$$

$$\varphi = ???$$

$$z = ???$$

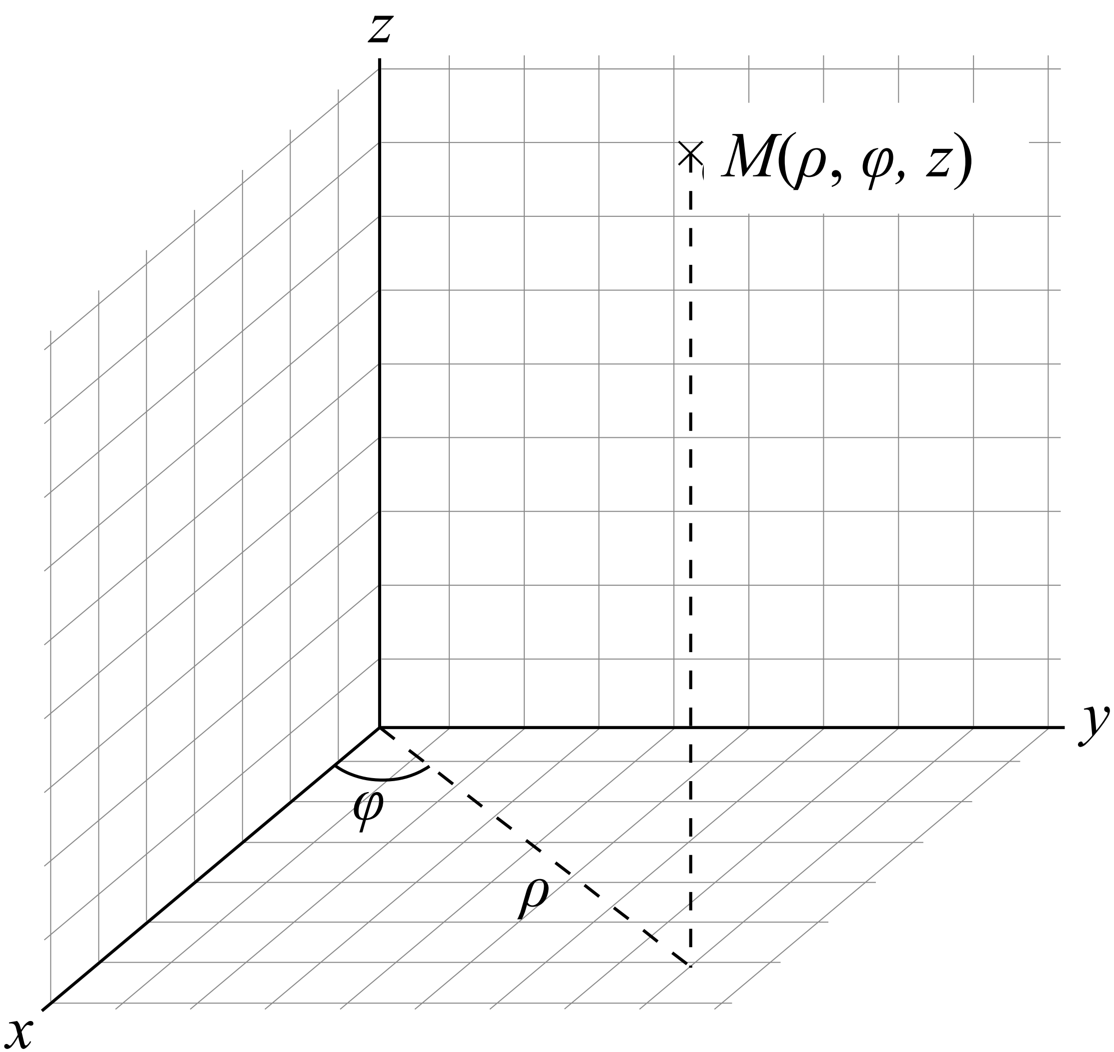
Цилиндрическая система координат

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$z = z$$

Цилиндрическая система координат



Дано: $M(\rho, \varphi, z)$

$$x = ???$$

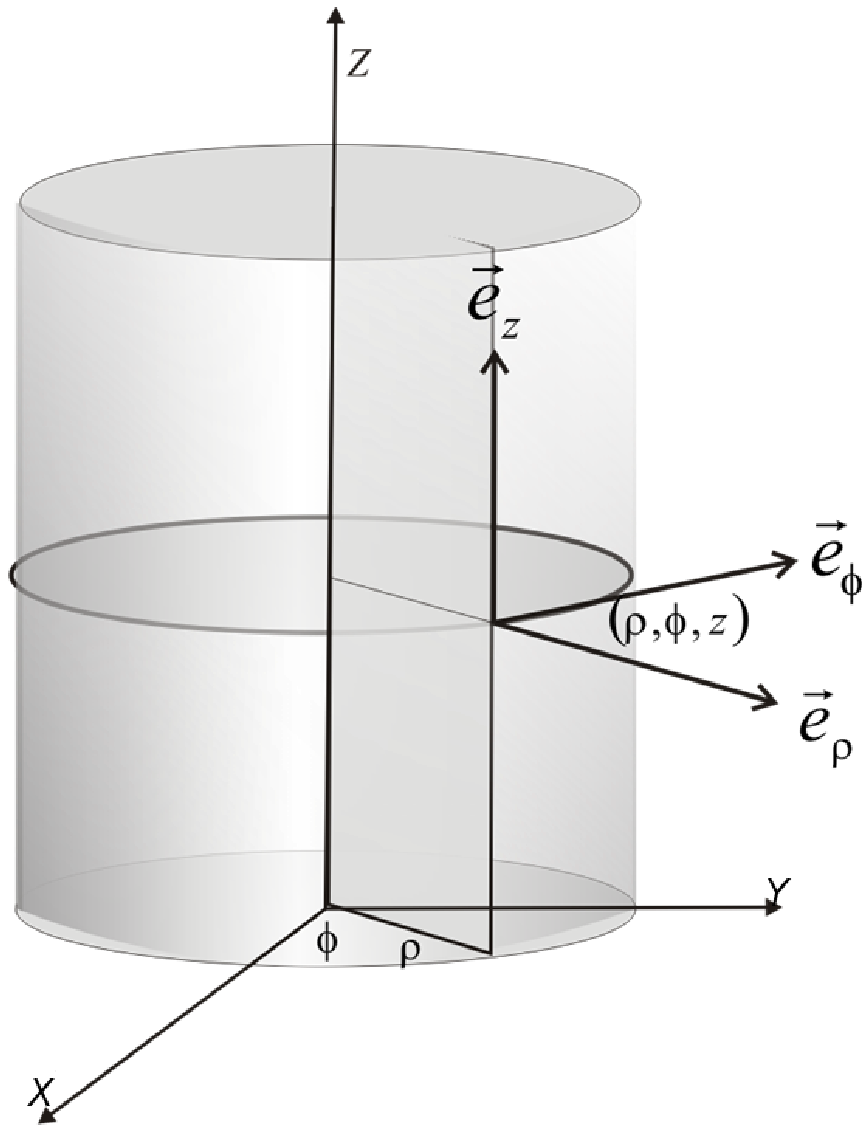
$$y = ???$$

$$z = ???$$

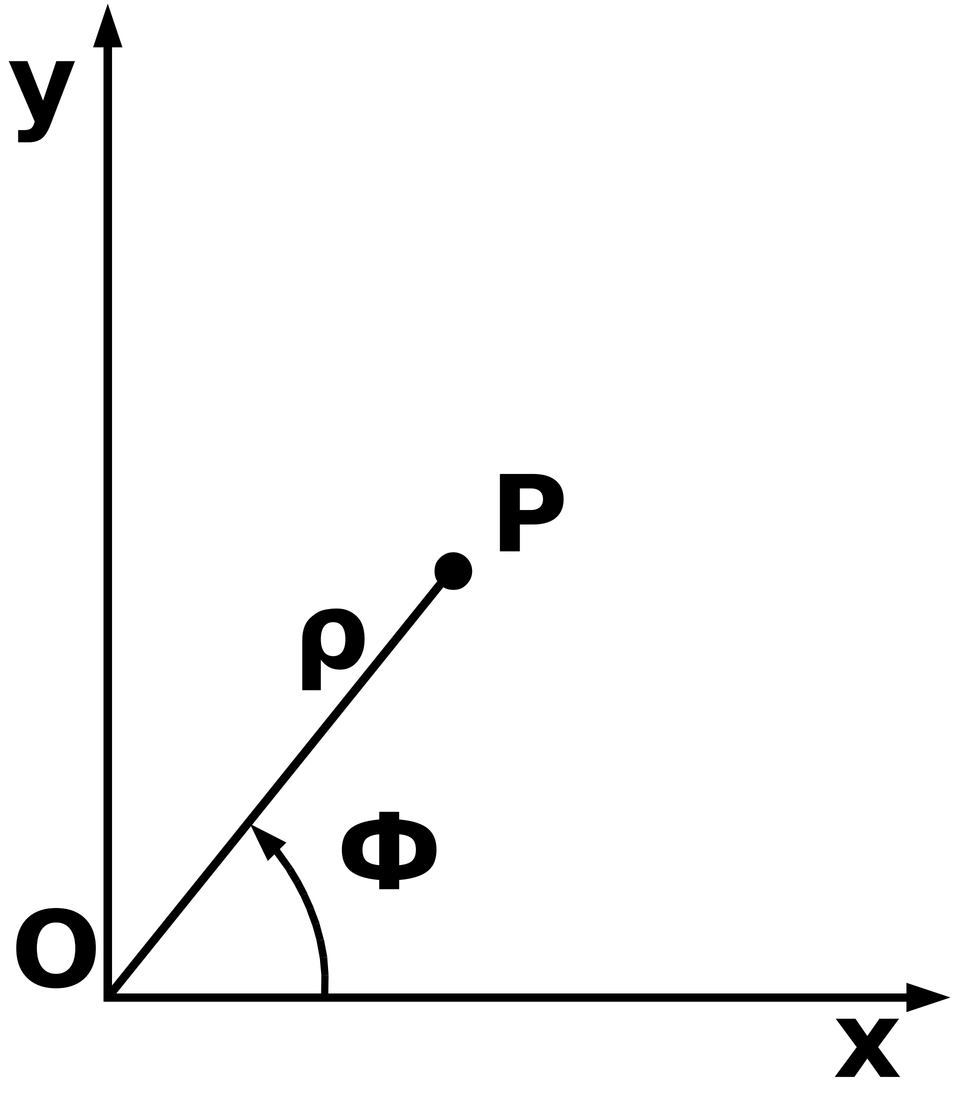
Цилиндрическая система координат

$$x = \rho \cdot \cos\varphi$$
$$y = \rho \cdot \sin\varphi$$
$$z = z$$

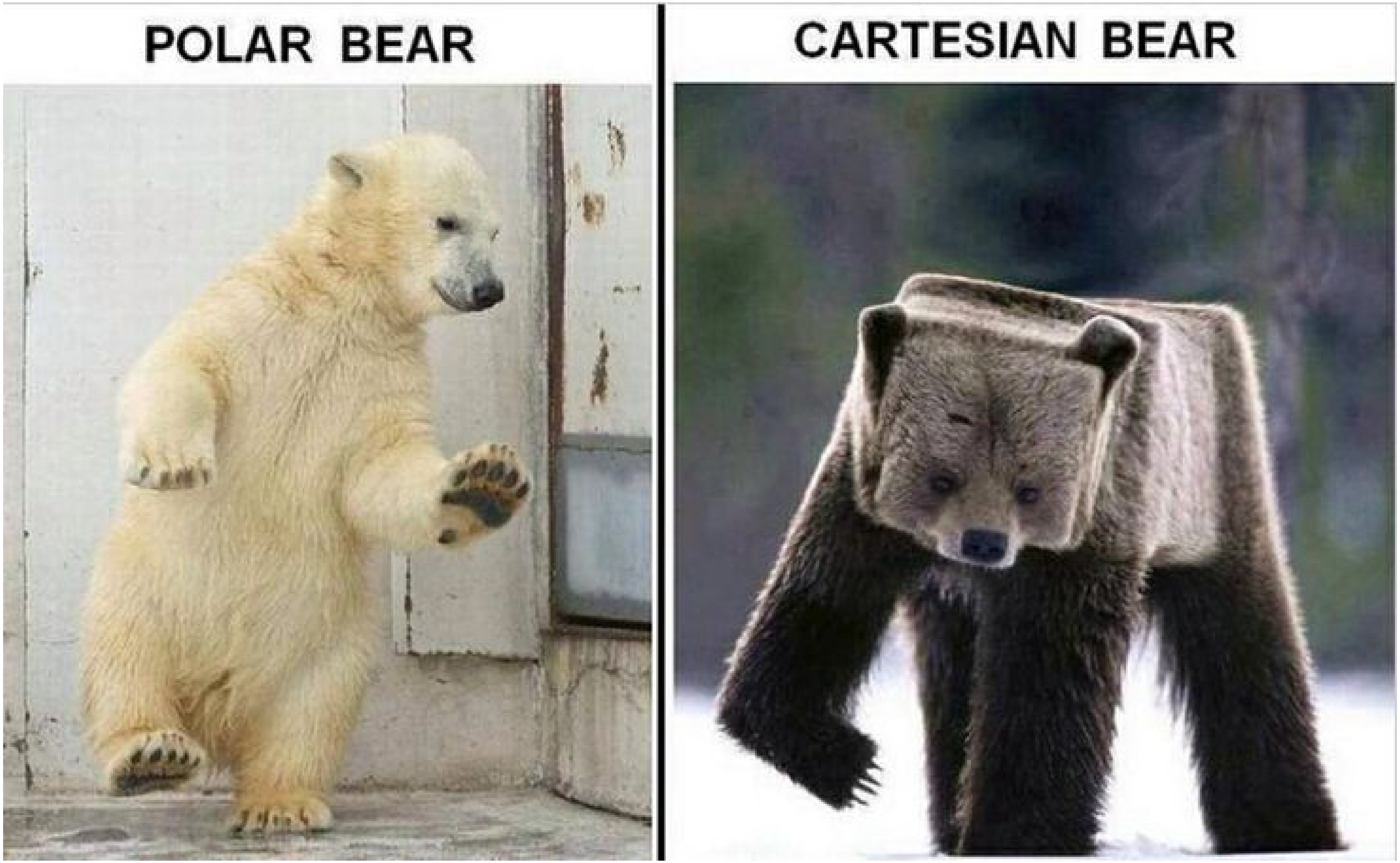
Цилиндрическая система координат



Полярная система координат



Полярная и декартова системы координат



Система координат в направляющих косинусах

Система координат в направляющих косинусах

$$u = \sin(\theta) \cdot \cos(\varphi)$$

$$v = \sin(\theta) \cdot \sin(\varphi)$$

Диаграмма направленности в сферической системе координат

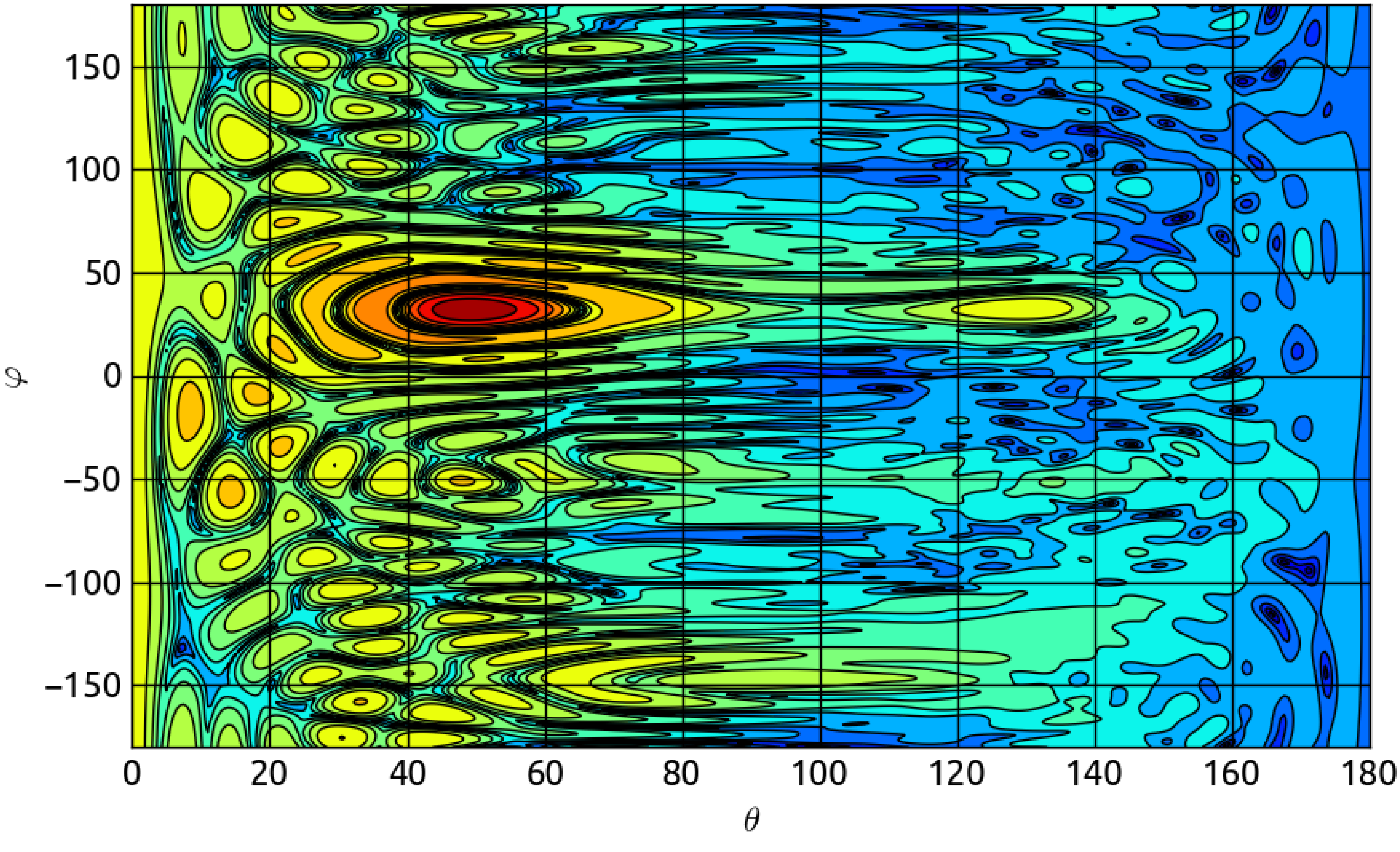
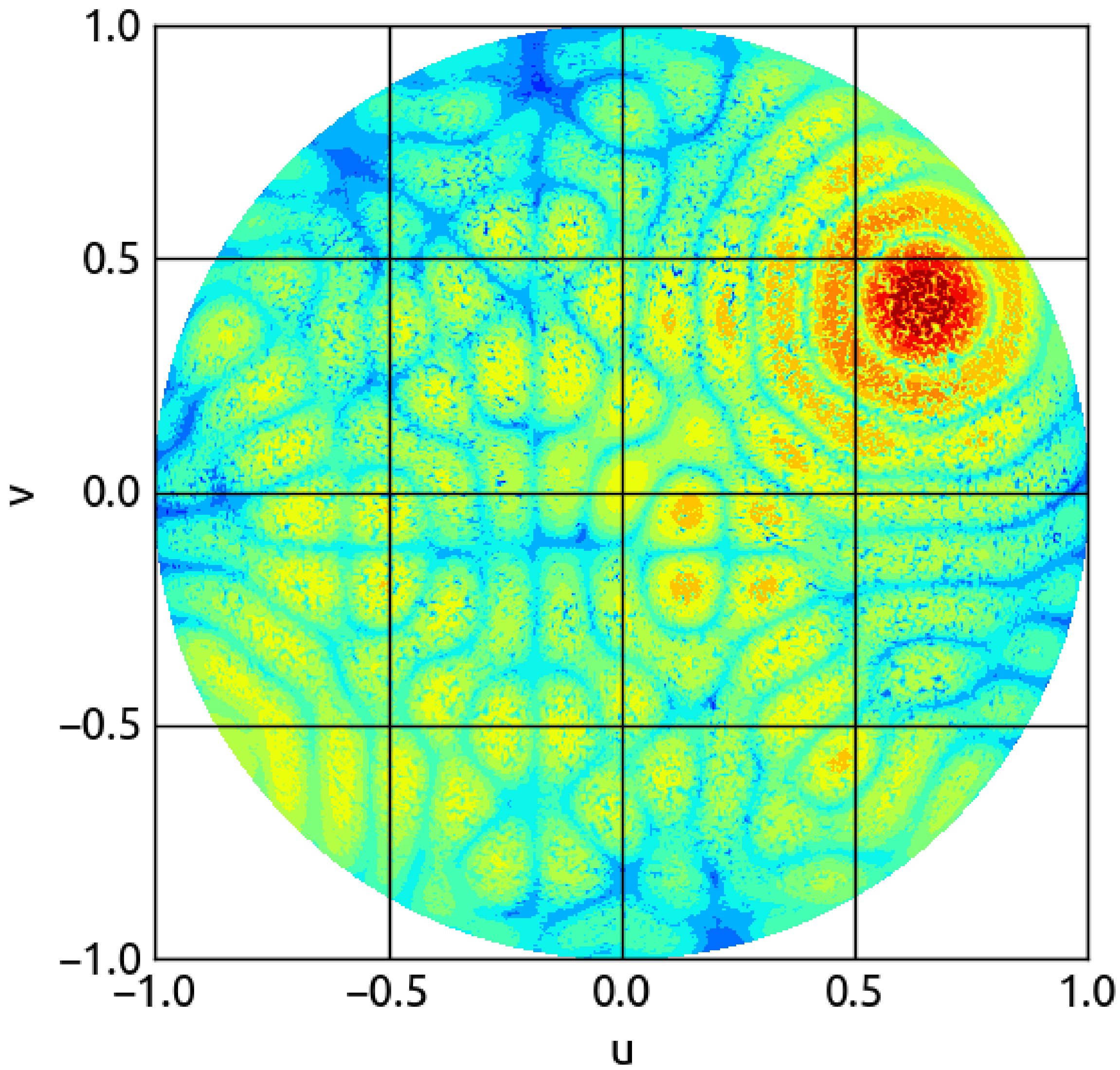


Диаграмма направленности в системе координат направляющих косинусов



Дифференциальные операторы в криволинейных системах координат

Градиент в декартовой системе координат

$F(q_1, q_2, q_3)$ - скалярная функция

$$\operatorname{grad} F = \frac{\partial F}{\partial q_1}\boldsymbol{q_1} + \frac{\partial F}{\partial q_2}\boldsymbol{q_2} + \frac{\partial F}{\partial q_3}\boldsymbol{q_3}$$

Градиент в криволинейных системах координат

$F\left(q_{1,} q_{2,} q_{3}\right)$ - скалярная функция

$$\operatorname{grad} F = \frac{1}{H_1}\frac{\partial F}{\partial q_1}\boldsymbol{q}_1 + \frac{1}{H_2}\frac{\partial F}{\partial q_2}\boldsymbol{q}_2 + \frac{1}{H_3}\frac{\partial F}{\partial q_3}\boldsymbol{q}_3$$

H_i — коэффициенты Ламе

Дивергенция в криволинейных системах координат

$\boldsymbol{a} = a_1 \boldsymbol{q_1} + a_2 \boldsymbol{q_1} + a_3 \boldsymbol{q_3}$ - векторное поле

$$\operatorname{div} \boldsymbol{a} = \frac{1}{H_1 H_2 H_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}\left(a_1 H_2 H_3\right) + \frac{\partial}{\partial q_2}\left(H_1 a_2 H_3\right) + \frac{\partial}{\partial q_3}\left(H_1 H_2 a_3\right)\right]$$

H_i — коэффициенты Ламе

Ротор в криволинейных системах координат

$\boldsymbol{a} = a_1 \boldsymbol{q_1} + a_2 \boldsymbol{q_1} + a_3 \boldsymbol{q_3}$ - векторное поле

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{a} = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \begin{vmatrix} H_1 \boldsymbol{q_1} & H_2 \boldsymbol{q_2} & H_3 \boldsymbol{q_3} \\ \dfrac{\partial}{\partial q_1} & \dfrac{\partial}{\partial q_2} & \dfrac{\partial}{\partial q_3} \\ H_1 a_1 & H_2 a_2 & H_3 a_3 \end{vmatrix}$$

H_i — коэффициенты Ламе

Коэффициенты Ламе

Для декартовой системы координат:

$$H_x = 1$$

$$H_y = 1$$

$$H_z = 1$$

Для сферической системы координат:

$$H_r = 1$$

$$H_\theta = r$$

$$H_\varphi = r\sin\theta$$

Для цилиндрической системы координат:

$$H_\rho = 1$$

$$H_\varphi = \rho$$

$$H_z = 1$$

Градиент в сферической системе координат

$$\operatorname{grad} F = \boldsymbol{r}_0 \frac{\partial F}{\partial r} + \boldsymbol{\theta}_0 \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \theta} + \boldsymbol{\varphi}_0 \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial F}{\partial \varphi}$$

Дивергенция в сферической системе координат

$$\operatorname{div}\boldsymbol{a}=\frac{1}{r^2\sin\theta}\left(\frac{\partial\left(r^2\sin\theta a_r\right)}{\partial r}+\frac{\partial\left(r\sin\theta a_\theta\right)}{\partial\theta}+\frac{\partial\left(r\,a_\varphi\right)}{\partial\varphi}\right)=$$

$$=\frac{1}{r^2}\frac{\partial\left(r^2a_r\right)}{\partial r}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\left(\sin\theta a_\theta\right)}{\partial\theta}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}$$

Ротор в сферической системе координат

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{a} = \frac{1}{r^2 \sin\theta} \begin{vmatrix} \boldsymbol{r_0} & r\,\boldsymbol{\theta_0} & r\sin\theta\,\boldsymbol{\varphi_0} \\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial \theta} & \dfrac{\partial}{\partial \varphi} \\ a_r & r\,a_\theta & r\sin\theta\,a_\varphi \end{vmatrix}$$

Градиент в цилиндрической системе координат

$$\operatorname{grad} F = \boldsymbol{\rho}_0 \frac{\partial F}{\partial \rho} + \boldsymbol{\varphi}_0 \frac{1}{\rho} \frac{\partial F}{\partial \varphi} + \mathbf{z}_0 \frac{\partial F}{\partial z}$$

Дивергенция в цилиндрической системе координат

$$\operatorname{div} \boldsymbol{a} = \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial\left(\rho a_{\rho}\right)}{\partial \rho} + \frac{\partial a_{\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial\left(\rho a_{z}\right)}{\partial z}\right] =$$

$$= \frac{1}{\rho}\frac{\partial\left(\rho a_{\rho}\right)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial a_{\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial a_{z}}{\partial z}$$

Ротор в цилиндрической системе координат

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{a} = \frac{1}{\rho}\begin{vmatrix} \boldsymbol{\rho}_0 & \rho\,\boldsymbol{\varphi}_0 & \boldsymbol{z}_0 \\ \dfrac{\partial}{\partial\rho} & \dfrac{\partial}{\partial\varphi} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ a_\rho & \rho a_\varphi & a_z \end{vmatrix}$$